國立武陵高中 104 學年度 第二學期 一年級數學科期末考試題卷(105.06.29)

範圍：第一章、第四章　班級：_____　座號：_____　姓名：___________

注意：試題共一張兩面，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題需計算至最簡，答案全對始計分，總分 106 分，得分破百以 100 分計

一、多重選擇題，每題 8 分，答錯 1 個選項得 5 分，答錯 2 個選項得 2 分，答錯 3 個(含)選項以上得 0 分，共 24 分

1、下列有關標準差與平均值(算術平均數)的敘述，哪些是正確的？ (A) 考慮甲、乙兩個班級，如果甲班的體重標準差比乙班的體重標準差大，則甲班的人數一定也比乙班多 (B) 考慮甲、乙兩個班級，如果甲班的體重平均值比乙班大，則甲班的體重標準差也比乙班大 (C) 如果將甲、乙兩個班級的體重資料合併，則合併後體重的平均值一定介於原來兩班的體重平均值之間 (D) 考慮將甲、乙兩個班級的體重資料合併，則合併後體重的標準差一定介於原來兩班的體重標準差之間 (E) 考慮甲班 40 的位學生的體重，若知道其平均值 60 公斤且標準差為 2 公斤，我們還是不能確定是否有人體重超過 62 公斤

3、今調查某校校長進教室次數 X(次)與他手上撿到的垃圾重量 Y(公克)，得相關係數為 $r_{X,Y}>0.5$。則下列敘述何者正確？ (A) 因為相關程度為中度或高度相關，因此我們可以說校長進教室的次數越多，則他手上撿到的垃圾重量越重 (B) 若 X,Y 的平均與標準差分別為 $(\overline{x},\sigma_x),(\overline{y},\sigma_y)$，則 Y 對 X 的迴歸直線為 $L:\left(\dfrac{y-\overline{y}}{\sigma_y}\right)=r_{X,Y}\left(\dfrac{x-\overline{x}}{\sigma_x}\right)$ (C) 若有某天校長進教室次數與手上垃圾重量分別為 (u,v)，若已知 $(u,v)=(\overline{x},\overline{y})$，則當我們排除 (u,v) 這組數據時，相關係數會變小 (D) 若有某一天校長進教室次數 u 與手上垃圾重量 v 未被統計到，(u,v) 落在 Y 對 X 的迴歸

直線上，則當這筆資料加入時，Y 對 X 的迴歸直線仍然不變 (E) 若因為校長進教室次數與手上的垃圾重量數值太大，因此我們將單位分別改成以百次與公斤作單位，即考慮 $Z=\dfrac{X}{10^2},W=\dfrac{Y}{10^3}$，則其相關係數 $r_{Z,W}=r_{X,Y}$。

背面有題

3、已知數列$<a_n>$，該數列前k項之最大值記為A_k，若第k項之後(不含第k項)的最小值存在，記為B_k，設$d_k = A_k - B_k$。例如：$<a_n>=<n^2>$，則可得到$A_2 = 4$，$B_2 = 9$以及$d_2 = A_2 - B_2 = 4-9 = -5$。則以下敘述何者正確？(A) 若$<a_n>=<n!>$，則$d_3 = 18$ (B) 若數列$<a_n>$為公差大於 0 的等差數列，則$<d_k>$為等差數列 (C) 若數列$<a_n>$為首項大於 0 且公比大於 1 的等比數列，則$<d_k>$為等比數列 (D) 若數列$<a_n>$滿足遞迴關係$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (\frac{1}{4})^n, n \geq 2, n \in N \end{cases}$，則$<d_k>$為等比數列 (E) 若數列$<a_n>$滿足遞迴關係$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{1-a_{n-1}}, n \geq 2, n \in N \end{cases}$，則$<d_k>$為等差數列

二、填充題 9 格，得分依附表，共 52 分

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
給分	7	14	21	28	35	40	44	48	52

1、若兩等差數列$<a_n>$與$<b_n>$的前n項和之比為$(4n+3):(7n+2)$，試求$\dfrac{a_{11}+a_{25}}{b_{11}+b_{25}} =$ ＿＿＿＿＿＿ .

2、試計算：$\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1+2}{1^3+2^3} + \dfrac{1+2+3}{1^3+2^3+3^3} + \cdots + \dfrac{1+2+\cdots+100}{1^3+2^3+\cdots+100^3} =$ ＿＿＿＿

背面有題

3、若阿海記錄了班上某同學七天中每天上課偷躺在教室後面地板上睡覺的時間(分鐘)：100、20、50、20、20、40 以及 x，若此組數據的算術平均數、中位數及眾數依照大小次序排列起來恰好形成一個等差數列，且其公差大於 0，試問滿足上述條件的所有可能的 x 值其總和=________(分鐘)

4、玲玲剛講解完相關係數的觀念，想測試一下同學是不是上課有認真聽講，還是聽過就還給老師了，但因天氣很熱所以只給了四筆的二維變數資料如下表：

X	0	6	a	b
Y	3	3	7	7

已知 X 的算術平均數為 5，且 X 與 Y 的相關係數為 $\dfrac{2}{3}$，試求 $ab=$ ________.

5、小淇在某班上課時檢查數學講義發現很多人雙手舉起來但沒帶講義，因此心情不好隨機抽考小考想看同學是否當機，結果小老師將成績統計如下表，若此筆資料的標準差為 $\sqrt{a}$，試求 $a=$________

分數	人數
40～50	2
50～60	5
60～70	11
70～80	16
80～90	10
90～100	6
合計	50

背面有題

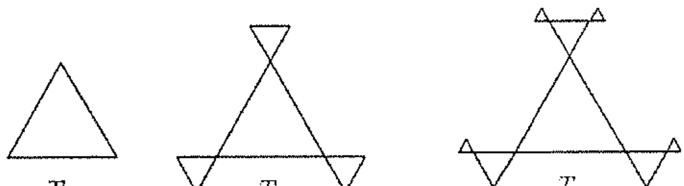
6、慧慧在情情的數學講義中看到兩組等差數列，分別是$<a_n>=<1,4,7,10,\cdots\cdots,1000>$及$<b_n>=<11,21,31,41,\cdots\cdots,1001>$，慧慧在把玩一番後發現，竟然有一些數字同時出現在兩個數列中，如果將上述兩個數列裡的共同項抽出來做成一個新數列$<c_n>$，試求數列$<c_n>$的總和=________

7、若數列$<a_n>$滿足$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=2n, n\geq 1 \\ a_1=36 \end{cases}$，試求$\dfrac{a_n}{n}$的最小值=________

8、有次數學考試，浩浩某個有 50 人的班級平均太低分，因此浩浩佛心來著實施調分。調分方式是開根號乘以 8 再加 20 分，也就是考x分的人他的分數調成$8\sqrt{x}+20$分。若已知調分後這個班級的平均是 75 分，標準差是 15 分，則原來的平均分數M介於兩相鄰整數k與$k+1$之間，試求$k=$________。

背面有題

9、設T_1為邊長等於 1 的正三角形；T_2為一個以T_1的三個頂點往外作出三個邊長為原正三角形邊長$\frac{1}{3}$的正三角形(稱之為第二層的正三角形)所形成的圖形；T_3為一個由T_2第二層三角形未連接的頂點往外作出邊長為第二層三角形邊長$\frac{1}{3}$的正三角形(稱之為第三層的正三角形)所形成的圖形；依此類推……，可得到T_1，T_2，T_3，……的圖形(如圖所示)，令a_n表T_n的周長，若$n<\sum_{k=1}^{100}a_k<n+1$，試求正整數$n$之值=__________



T_1　　T_2　　T_3

三、計算證明題，每題10分，沒有過程不予計分，共30分

1、惠惠有定存的習慣，她每年年初固定存 4 萬元到銀行同一個帳戶中。已知該帳戶是依年利率2%複利計算，於每年年底計息一次，試求惠惠至少要多少年(取整數年)，於該年底結算帳戶內的本利和時才會超過100 萬元？（請利用附表求解）

常用對數表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

2、森森找到了一種存在感量化的方法。現今森森調查某組長在當天打掃時廣播的時間x(分鐘)和當天存在感分數y(分)的統計量表如下：

x（分鐘）	7	5	4	6	3	5
y（分）	90	60	70	80	50	70

(1) 試求y對x的迴歸直線　(6分)

(2) 假設某組長今天在打掃時間廣播了8分鐘，試利用上面的迴歸直線，預測存在感分數為多少分？　(2分)

(3) 若某天打掃時間森森忘記記錄某組長廣播的時間，只知道當天某組長的存在感分數為75分，若森森想估計某組長廣播了多久，能直接套用(2)的迴歸方程式求嗎？請解釋原因　(2分)

3、已知數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} na_{n+1}-(n+2)a_n=-2, n\geq 1 \\ a_1=9 \end{cases}$

(1) 試猜測a_n的通式　(3分)

(2) 利用數學歸納法證明(1)的猜測　(7分)

國立武陵高中 104 學年度第二學期 一年級數學科期末考答案卷(105.06.29)

班級：__________ 姓名：__________ 座號：________

一、多重選擇題

【每題 8 分，答錯 1 選項得 5 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項以上得 0 分】

1	CE	2	BDE	3	BCDE

二、填充題【共 9 格，需全對才給分】

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
給分	7	14	21	28	35	40	44	48	52

1	2	3	4	5
$\frac{11}{19}$	$\frac{200}{101}$	200	48	165
6	7	8	9	
16863	11	50	1173	

三、計算證明題，每題 10 分，共 30 分（沒有過程不計分）

1、21 年

列式：

$4(1.02)^n+4(1.02)^{n-1}+\cdots+4(1.02)>100$ (3分)

$\Rightarrow \frac{(1.02)\left[(1.02)^n-1\right]}{1.02-1}>25 \Rightarrow (1.02)^n>\frac{4\cdot 19}{3\cdot 17}$ (3分)

查表得 $n>20.\sim$

$\therefore n\geq 21$ (4分)

2、

(1) $y=9x+25$ (6 分)

(2) 97 (2 分)

(3) 不可以，因為 $y=9x+25$ 式中，x 才是自變數而非 y。因此此式為以 x 估計 y，不能以 y 來反推 x。 (2 分)

3、(1) $a_n=(2n+1)^2, \forall n\in N$ (3 分)

(2) $n=1$ 時 $a_1=3^2=9$，成立 (1分)

設 $n=k$ 時，

$a_k=(2k+1)^2$ 成立 (1分)

則 $n=k+1$ 時

$k a_{k+1}-(k+2)a_k=-2$

$\therefore k a_{k+1}=(k+2)\cdot(2k+1)^2-2$

$\Rightarrow a_{k+1}=\left[2(k+1)+1\right]^2$，也成立 (4分)

$\therefore$ 由數學歸納法知，

猜測成立 (1分)