

桃園市立武陵高中 113 學年度第 2 學期高三數甲期末考試題

一、多重選擇題(每題 7 分，共 21 分，錯一個得 4.5 分、錯兩個得 2 分，其他不給分)

1. 甲宣稱手上的一枚硬幣出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$ 。今檢定此硬幣出現正面的機率，並列出前

三步驟如下：(一) 假設「此枚硬幣出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$ 」 (二) 設定檢定統計量
為「連續投擲此枚硬幣 5 次中，出現正面的次數」 (三) 設定顯著水準為 0.05

設隨機變數 X 表示出現正面的次數且 $X \sim B(5, \frac{3}{4})$ ，試問下列敘述哪些正確？_____

(1) $X=1$ 的機率小於 0.05 (2) $X=5$ 的機率大於 0.05

(3) $X=k$ 的機率中，以 $k=5$ 的機率最大 (4) 拒絕域為 $X < 3$

(5) 若試驗的結果恰為 3 次正面，則不拒絕「此枚硬幣出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$ 」

2. 有一款過關遊戲，甲每次通關的機率為 $\frac{1}{5}$ ，且該次沒通關，則重玩一次過關遊戲。若該次

通關，則停止遊戲。設隨機變數 X 的取值表示通關所需的次數，下列敘述哪些正確？_____

(1) 通關所需次數的期望值 $E(X)=4$ (2) 通關所需次數的變異數 $Var(X)=20$

(3) 若 $Y=-2X+5$ ，則 Y 的標準差 $\sigma_Y=-4\sqrt{5}$ (4) 甲至少 3 次才通關的機率為 $\frac{16}{25}$

(5) 甲至少 2 次失敗的機率為 $\frac{9}{25}$

3. 已知雙曲線 Γ 的一焦點為 $F(1, -9)$ 及兩漸近線為 $3x-4y+1=0$ 、 $3x+4y-7=0$ ，試問下列

敘述哪些正確？_____ (1) 對稱中心為 $(1, 1)$ (2) 共軛軸長為 8

(3) 直線 $x-y=0$ 與 Γ 相交兩點 (4) 直線 $3x+4y=0$ 與 Γ 相交兩點

(5) 此雙曲線 Γ 的共軛雙曲線標準式為 $\frac{(x-1)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$

二、填充題(每格 6 分，共 60 分)

1. 袋中有大小相同、編號為 1, 2, 3, 4, 5 的號碼球各一顆，每次從袋中取出一球，取後不放回。

若取出之球的號碼大於 3 時，就停止取球，否則繼續取球。設隨機變數 X 表示取得號碼

大於 3 所需的球數，將 $X=k$ 時的機率記為 $P(X=k)$ ，求 $P(X \leq 2) =$ _____

2. 一等軸雙曲線 Γ 通過點 $P(4, -2)$ ，對稱中心為 $(2, -1)$ ，且 Γ 有一漸近線為 $x + y - 1 = 0$ ，求等軸雙曲線 Γ 的標準式為_____
3. 擲一粒公正的四面體骰子，其各面的點數分別為 $1, 2, 3, 4$ ，且每面出現的機率均等，擲此骰子 2 次，並令隨機變數 X 表示 2 次中的最大點數，若 X 的期望值為 $E(X)$ ，標準差為 σ ，試問數對 $(E(X), \sigma) =$ _____
4. 不透明的袋子內有 2 個白球 3 個紅球。今從袋中一次取出兩球，觀察其顏色後再放回，已知每一次取球都是獨立事件，且每球被取到的機會均相等。如此重複操作 5 次。
(1) 設隨機變數 X 表示 5 次中出現兩球為同色球的次數，若 X 的期望值為 $E(X)$ ，標準差為 σ_X ，試問數對 $(E(X), \sigma_X) =$ _____
- (2) 承(1)，每次取到同色球給獎金 500 元、異色球給獎金 100 元。設隨機變數 Y 表示 5 次之後所獲得的總獎金，若 Y 的期望值為 $E(Y)$ ，標準差為 σ_Y ，試問數對 $(E(Y), \sigma_Y) =$ _____
5. 將圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ ，以原點為中心沿鉛直方向伸縮 $\frac{3}{2}$ 倍，再平移 $(1, -2)$ ，得到一橢圓 Γ 。若點 P 為橢圓 Γ 上任一點，試求點 P 到直線 $L: 2x - y + 6 = 0$ 的最大距離為_____
6. 在直線 $L: x + y = 4$ 上取一點 P ，橢圓 Γ 與橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 有相同的焦點，且通過 P 點。試問當 P 點座標為_____時，此橢圓 Γ 的長軸長會最短。
7. 平面上有兩拋物線 $\Gamma_1: (y-1)^2 = 4x$ 、 $\Gamma_2: (y+1)^2 = -8(x-10)$ ，設 Γ_1, Γ_2 的焦點分別為 F_1, F_2 ，又兩拋物線交於 P, Q 兩點，試問四邊形 F_1PF_2Q 的周長為_____

8. 設橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{t^2} = 1$ 之長軸為 x 軸，兩焦點為 F, F' ， B 為短軸之一頂點， $\overline{AB}$ 為過 F' 的焦弦

(橢圓上相異兩點線段稱之為弦、過焦點的弦稱之為焦弦)，若 $\angle AFB = 90^\circ$ ，則 $\overline{FF'} =$ _____

9. 在拋物線 $y = x^2$ 的圖形上有三點 $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 、 $B(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 、 P ，其中點 P 介於 A 與 B 之間，過 B

作直線 AP 的垂線，垂足點為 Q ，試求 $\overline{AP} \cdot \overline{PQ}$ 的最大值為 _____

三、計算題(9、10 分，共 19 分，選擇題可不寫計算過程)

1. (1) 右圖為一雙曲線及其貫軸所在的直線 L ，

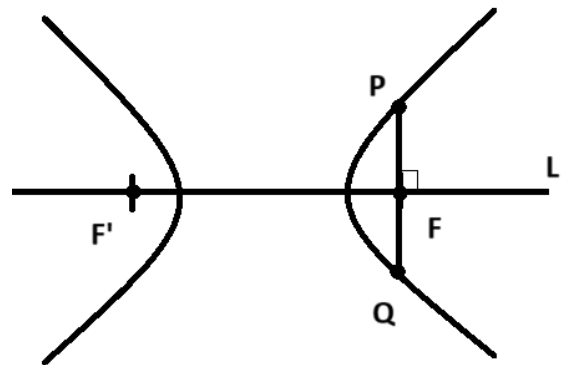
F, F' 為此雙曲線之兩焦點。過 F 點做 L 的

垂線交雙曲線於 P, Q 兩點， $\overline{PQ}$ 稱為此雙曲

線的正焦弦。若此雙曲線貫軸長為 $2a$ ，

共軛軸長為 $2b$ 。

試證明：此雙曲線的正焦弦長 $\overline{PQ} = \frac{2b^2}{a}$ (5%)



(2) 有一雙曲線與橢圓 $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} = 1$ 共焦點，且正焦弦長為 4，求此雙曲線標準式為 _____

(4%)

2. (1) 有關橢圓 $\Gamma_1 : \sqrt{(x-6)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-8)^2} = 20$ ，則下列哪些是正確的?(5%) _____

(1) 對稱中心為(3,4) (2) 長軸斜率為 $\frac{3}{4}$ (3) (-3,12) 為長軸上的一個頂點

(4) (-5,0) 在橢圓內部 (5) 橢圓上一點 P 與點(6,0) 之距離恰為整數的點共有 20 個

(2) 承(1)，將 Γ_1 以原點為中心，依逆時針方向旋轉銳角 θ 且 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，得到橢圓 Γ_2 ，
求橢圓 Γ_2 的方程式為_____ (5%)

桃園市立武陵高中 113 學年度第 2 學期高三數甲期末考答案卷

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

一、多重選擇題(每題 7 分，共 21 分，錯一個得 4.5 分、錯兩個得 2 分，其他不給分)

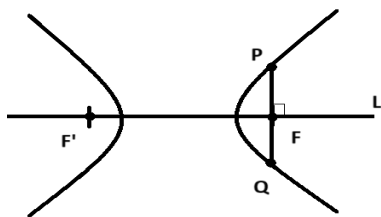
1. 125	2. 24	3. 135
-----------	----------	-----------

二、填充題(每格 6 分，共 60 分)

1. 0.7	2. $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$	3. $(\frac{25}{8}, \frac{\sqrt{55}}{8})$
4. (1) $(2, \frac{\sqrt{30}}{5})$	4. (2) $(1300, 80\sqrt{30})$	5. $3\sqrt{5}$
6. $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	7. 26	8. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
		9. $\frac{27}{16}$

三、計算題(9、10 分，共 19 分，選擇題可不寫計算過程)

1. (1) 試證明：此雙曲線的正焦弦長 $\overline{PQ} = \frac{2b^2}{a}$ (5%)



(2)(4%) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$

2.

(1)(5%) 135

(2)5% $\frac{(x+\frac{7}{5})^2}{100} + \frac{(y-\frac{24}{5})^2}{75} = 1$