

桃園市立武陵高中 **113** 學年度上高三數學乙 第一次期中考 試題卷

範圍：數乙 第一章

三年____班____號 姓名：_____

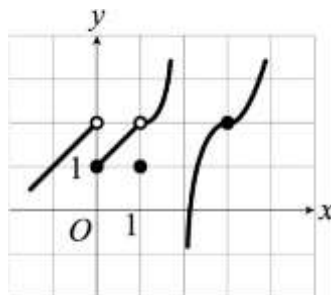
一、多重選擇題（每題 **8** 分，共 **32** 分，答錯一個選項得 **5** 分，答錯兩個選項得 **2** 分，答錯三個選項以上或未作答者得 **0** 分）

1. 下列各選項中，何者的極限存在？

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right)$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{8}}{\pi} \right)^n$
- (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{100}{99} \right)^n$ (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n - 3^n}{5^n} \right)$

2. 已知函數 $y = f(x)$ 的圖形如圖，選出正確的選項。

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 極限存在
 (B) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 極限存在
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續
 (E) $f(x)$ 在 $x=3$ 處連續



3. 下列各選項中，何者的極限存在？（註： $[x]$ 為高斯符號）

- (A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x-3]}{x-3}$
 (B) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[x-3]}{x-3}$
 (C) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$
 (D) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x-1}$
 (E) $\lim_{x \rightarrow 2} x \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor$

4. 已知函數 f 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 6$ ，下列哪些敘述正確？

(A) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} + \frac{x-1}{x} \right) = 6$

(B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x-1)} = 3$

(C) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 6$

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(E) $\lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot f(x)) = f(1)$

二、填充題（每格 5 分，共 60 分）

1. 求下列各極限值。（若所求無極限，請填不存在）：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{7^n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n}{3n^2 - 4n + 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2}{x^3 + 4x - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3 - 8}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知首項為 a ，公比為 $0.\overline{12}$ 的無窮等比級數和為 33，求首項 a 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知 $f(x) = \sqrt{x+9}$ ， $g(x) = -x^2 + x - 3$ ，則：

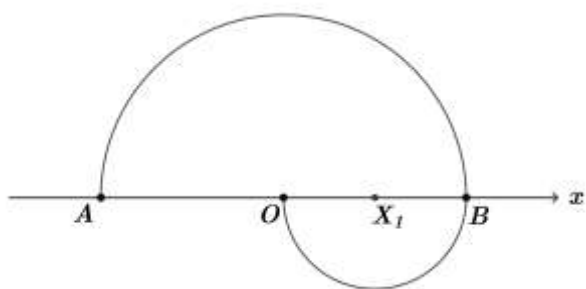
(1) $\left(\frac{f}{g} + g \circ f \right)(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $(f \circ g)(x)$ 的定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, p \leq x \leq q\}$ ，則 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

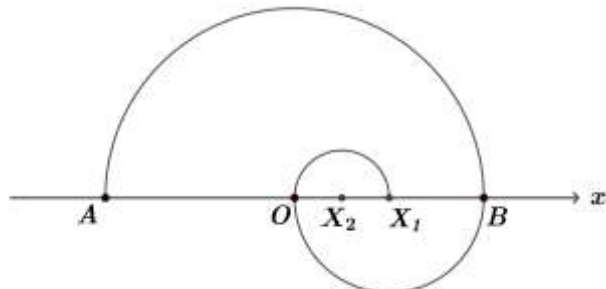
4. 設函數 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & x < -1 \\ \frac{a}{x+2} - 1, & -1 \leq x < 3 \\ bx + 9, & x \geq 3 \end{cases}$ ，若 f 在實數上為連續函數，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知對任意實數 x ，函數 f 滿足 $-2x^2 + 10x - 8 \leq f(x) \cdot (x+2) \leq 2x$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

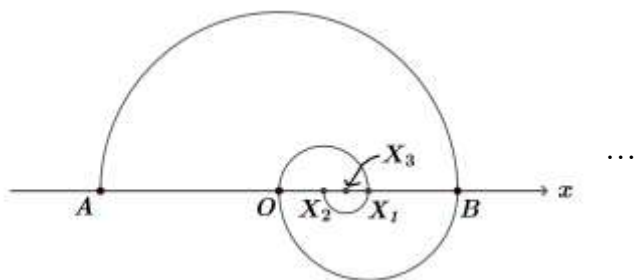
6. 天命人 踏上尋找大聖根器的旅程時，不慎闖入了一個螺旋曲線迷宮。該迷宮的設計方式是：
- 『設 O 為 x 軸上的原點，以 O 為圓心，半徑為 4 畫一個上半圓，交 x 軸於 $A(-4)$ 、 $B(4)$ 兩點後，以 B 、 O 的中點 X_1 為圓心，畫一個下半圓，如圖(一)所示；再以 O 、 X_1 的中點 X_2 為圓心，畫一個上半圓，如圖(二)所示；接著以 X_1 、 X_2 的中點 X_3 為圓心，畫一個下半圓，如圖(三)所示。循此規律，持續以 X_{n-2} 、 X_{n-1} 的中點 X_n 為圓心 ($n=3, 4, 5, \dots$) 交錯畫出下、上半圓形，便可得到一條由無窮多個半圓形所組成的螺旋曲線。』



圖(一)

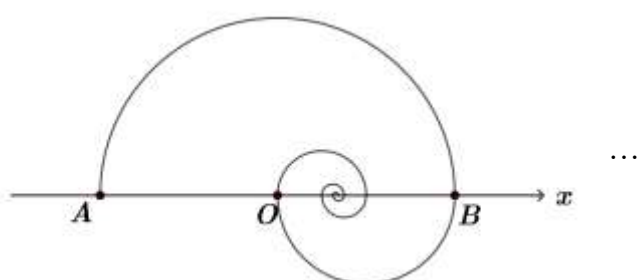


圖(二)



圖(三)

...



圖(n)

...

- (1) 若以 A 點為起點，沿著這條螺旋曲線一直向內行走，試問曲線的總長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 依上述規則可知，圓心 X_1 在 x 軸上的坐標為 2，圓心 X_2 在 x 軸上的坐標為 1，試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ 在 x 軸上的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、混合題（共 8 分）

小聖在複習數學的時候，正好在自己的筆記本上看到勘根定理的相關內容，他在筆記本中寫的定理內容是：

「設實數 $a < b$ ，若函數 $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $f(a) \cdot f(b) \square 0$ ，則至少有一實數 c 滿足 $a < c < b$ 使得 $f(c)=0$ ，即 c 為方程式 $f(x)=0$ 的實根。」

1. 請問上述定理中的 $\square$ 應該填入什麼？（單選，2 分）

(A) $>$ (B) $\geq$ (C) $<$ (D) $\leq$ (E) $=$

2. 承 1 填入正確的內容後，小聖反覆思索後，覺得定理內容有點怪怪的，似乎缺少了一個條件，請問缺少的條件是什麼？（填充，2 分）

3. 承上，終於有了正確的定理內容，請你利用勘根定理幫助小聖回答下列問題。

「若函數 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$ ，已知方程式 $f(x) = 0$ 有三個實根，試判斷 $f(x) = 0$ 在哪些連續整數之間有實根？」

（計算題，請詳列計算過程，4 分）

桃園市立武陵高中 **113** 學年度上高三數學乙 第一次期中考 答案卷

範圍：數乙 第一章

三年____班____號 姓名：_____

一、多重選擇題（每題 **8** 分，共 **32** 分，答錯一個選項得 **5** 分，答錯兩個選項得 **2** 分，答錯三個選項以上或未作答者得 **0** 分）

1.		2.		3.		4.	
----	--	----	--	----	--	----	--

二、填充題（每格 **5** 分，共 **60** 分）

1(1).		1(2).		1(3).		1(4).	
1(5).		2.		3(1).		3(2).	
4.		5.		6(1).		6(2).	

三、混合題（共 **8** 分）

1. (單選 2 分)	
2. (填充 2 分)	
3. (計算 4 分)	

桃園市立武陵高中 **113** 學年度上高三數學乙 第一次期中考 解答卷

範圍：數乙 第一章

三年____班____號 姓名：_____

一、多重選擇題（每題 **8** 分，共 **32** 分，答錯一個選項得 **5** 分，答錯兩個選項得 **2** 分，答錯三個選項以上或未作答者得 **0** 分）

1.	CE	2.	CE	3.	BD	4.	ABD
----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	------------

二、填充題（每格 **5** 分，共 **60** 分）

1(1).	5	1(2).	$\frac{2}{3}$	1(3).	$\frac{3}{4}$	1(4).	2
1(5).	12	2.	29	3(1).	-10	3(2).	$(-2, 3)$
4.	$(5, -3)$	5.	1	6(1).	8π	6(2).	$\frac{4}{3}$

三、混合題（共 **8** 分）

1. (單選 2 分)	C
2. (填充 2 分)	f 為 $[a, b]$ 上的連續函數
3. (計算 4 分)	三根分別在落在 $(-3, -2)$、$(-1, 0)$、$(1, 2)$ 之間