301-318, 320

武陵高中 110 學年度第一學期數學科高三數甲期中考試題

範圍:選修數甲(上)單元1-2 (301-318, 320)

一、多選題：32%(每題 8 分，錯 1 選項得 5 分，錯 2 選項得 2 分，錯 3 選項以上得 0 分)

1. 函數 $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$， $g(x)=x\sin x$，下列函數在其定義域的敘述哪些正確？

(A) $f(x)$是奇函數　　(B) $g(x)$是偶函數

(C) $f(x)\times g(x)$ 是奇函數　　(D) $(f\circ g)(x)$ 是偶函數

(E) $(f\circ f)(x)$ 是偶函數

2. 下列各敘述哪些正確？

(A) $0.\overline{3}=\dfrac{1}{3}$，且 $0.\overline{9}=1$

(B) $0.123+0.010203+0.001002003+\ldots\ldots=0.\overline{1}+0.\overline{02}+0.\overline{003}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\underbrace{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m}+\ldots+\dfrac{1}{m}}_{m\text{ 項}}+\ldots$ 此無窮級數和發散

(D) 已知$\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right)<\left(1+\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}\right)=2-\dfrac{1}{n}$ ，故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2$

(E) 讓無窮級數$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2x-9}{x^2+1}\right)^n$ 極限存在的所有x為 $\{x\in R\,|\,x>2$ 或 $x<-4\}$

3. 關於實數數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$，$\langle c_n\rangle$下列各敘述哪些正確？

(A)若數列$\langle a_n+2b_n\rangle$收斂，且數列$\langle 3a_n-b_n\rangle$也收斂，則$\langle a_n-b_n\rangle$收斂

(B)若數列$\langle a_nb_n\rangle$收斂，且數列$\langle b_nc_n\rangle$也收斂，則$\langle a_nc_n\rangle$收斂

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0$

(D)若$b_n<a_n<c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$

(E)若$b_n<a_n<c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0$，則$\langle a_n\rangle$收斂

4. 關於函數$f(x)=\begin{cases}x & ,x\in Q\\ x^2 & ,x\notin Q\end{cases}$ 下列選項哪些正確？（Q為所有有理數集合）

(A) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$

(B) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

(C) 函數$f(x)$在$x=1$處連續

(D) 函數$f(x)$在$x=0$處連續

(E) 函數$f(x)$在$x=-1$處連續

二. 填充題：48%(每格 6 分)

A. 台灣綜藝節目「油魚遊戲」共有 7 關，每關所玩的遊戲相當公平 3 人一組每組會淘汰 1 人，當參賽者人數不為 3 的倍數時，無法湊成組的人會自動晉級下一關。依前敘述可寫出函數 $f(x)=x-\left[\dfrac{x}{3}\right]$，如果參賽者有 200 人參加遊戲，則會有$f(200)$人晉級，繼續挑戰第二關…。問此 200 人最後挑戰 7 關成功過關的有多少人？______

B. $f(x)=[x+5]+[5-x]$， $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=a$， $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=b$， $f(3)=c$， 試求數對$(a,b,c)=$ ______

C. 求極限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2}=$______

D. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n=e^r$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r+1}{n+1}\right)^{n+1}=$______

E. 下列數列共有幾個極限值存在$\left\langle\dfrac{4n^2+7n-8}{4n-8}\right\rangle$、$\left\langle\dfrac{n^2+5n-1}{n^3-n}\right\rangle$、$\left\langle\dfrac{(n+3)^5-(n-2)^5}{n^4}\right\rangle$、$\left\langle\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{2}\right)^n\right\rangle$、$\left\langle\dfrac{2n^2+1}{n}-\dfrac{2n-1}{n}\right\rangle$、$\left\langle\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}\right\rangle$。___________個

F. 已知函數$f(x)$是連續函數，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=5$與$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2}{x-1}=2$，試求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)-2f(x)+2f(x)-6}{x-1}$，之值__________

G. 已知a,b,c為常數，$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-9}=2$，$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-4}=-3$，

求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}=$______________

H. $f(x)=x^2+4x+3$，$f(x)$定義域是$[-3,2]$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)$定義域是$\{x\in R\mid x\in[-5,5],x\neq0\}$，求$(g\circ f)(x)$的值域______________

三. 混合題：20%(計算題需要完整過程，否則不計分)

1. (1)(複選題)關於高斯函數下列選項哪些正確(4 分)

(A) $x>0$時$[x]\le x$　(B) $x<0$時$x\le[x]$

(C) $x-1<[x]$　(D) $x-1$, $[x]$ 有可能相等

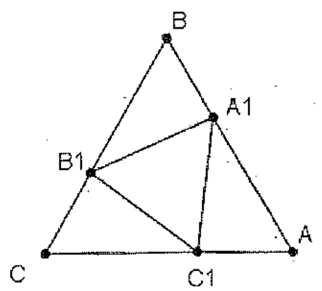
(2) (計算題)試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n^2}{2^n}\right]}{3n^2}=$__________(8 分)

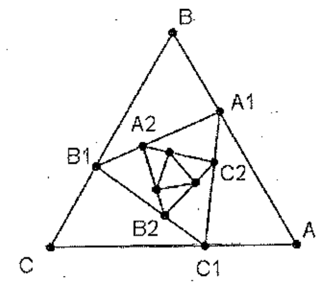
2. 如圖所示，正三角形$\triangle ABC$邊長為 11，取$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$上$8:3$的內分點，$\overline{AA_1}=\dfrac{8}{11}\overline{AB}$，$\overline{BB_1}=\dfrac{8}{11}\overline{BC}$，$\overline{CC_1}=\dfrac{8}{11}\overline{CA}$，形成$\triangle A_1B_1C_1$。再依此方法取$\triangle A_1B_1C_1$邊上$8:3$的內分點形成$\triangle A_2B_2C_2\cdots$。

稱$\triangle AA_1C_1$為T_1，$\triangle A_1A_2C_2$為T_2，依此類推可得$T_3,T_4,\ldots\ldots$

(1) (填充題)求$\overline{A_1C_1}=$________(2 分)

(2) (計算題)求$T_1,T_2,T_3,T_4,\ldots\ldots$面積的無窮級數和(6 分)





301-318, 320

武陵高中 110 學年度第一學期數學科高三(數甲)第一次期中考答案卷

一、多選題 32%(每題 8 分，錯 1 選項得 5 分，錯 2 選項得 2 分，錯 3 選項以上得 0 分)

1	ABCD	2	ABCE	3	ACD	4	ABCD

二. 填充題：48%(每格 6 分)

A 12	B (9, 9, 10)	C $\cancel{\frac{1}{8\sqrt{3}}}$ $\frac{\sqrt{3}}{24}$	D e^{r+1}
E 3	F 16	G 72	H $\{x\in R\mid x\le -1$ 或 $x\ge \frac{1}{5}\}$

三. 混合題：20%(需要完整過程，否則不計分)

1.

(2) AC　　4%

(2)8%

$$\frac{\frac{n^2}{2}-1+\frac{n^2}{2^2}-1+\ldots+\frac{n^2}{2^n}-1}{3n^2}\le\frac{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n^2}{2^n}\right]}{3n^2}\le\frac{\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2^2}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}}{3n^2}$$

$$\frac{n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-n}{3n^2}\le\frac{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n^2}{2^n}\right]}{3n^2}\le\frac{n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{3}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2}=\frac{1}{3}，\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-n}{3n^2}=\frac{1}{3}$$

由夾擠定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n^2}{2^n}\right]}{3n^2}=\frac{1}{3}$

2.

(1) 7　　2%

法 1 $\triangle AA_1C_1$ 面積 $\frac{1}{2}\times 3\times 8\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$　(1%)

$\triangle A_1B_1C_1$ 邊長為 $\triangle ABC$ 的 $\frac{7}{11}$ 倍　(2%)

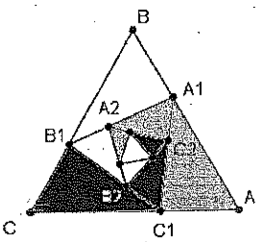
可知 $T_1,T_2,T_3,T_4,\ldots\ldots$ 邊長為等比數列 公比為 $\frac{7}{11}$

所求

$$6\sqrt{3}+\left(\frac{7}{11}\right)^2 6\sqrt{3}+\left(\frac{7}{11}\right)^4 6\sqrt{3}+\ldots$$

$$=\frac{\left(\frac{7}{11}\right)^2 6\sqrt{3}}{1-\left(\frac{7}{11}\right)^2}=\frac{121\sqrt{3}}{12}\qquad(3\%)$$

法 2



由圖可知

T_1 面積 $=\frac{1}{3}$ ($\triangle ABC$ 面積 $-\triangle A_1B_1C_1$ 面積)

T_1 面積 $+T_2$ 面積 $=\frac{1}{3}$ ($\triangle ABC$ 面積 $-\triangle A_2B_2C_2$ 面積)

T_1 面積 $+T_2$ 面積 $+\ldots T_n$ 面積

$=\frac{1}{3}$ ($\triangle ABC$ 面積 $-\triangle A_nB_nC_n$ 面積)

所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{121\sqrt{3}}{4}-\frac{121\sqrt{3}}{4}\left(\frac{7}{11}\right)^{2n}\right)=\frac{121\sqrt{3}}{12}$