

桃園市立武陵高中 113 學年度第一學期 高一數學 第一次段考

範圍：翰林版 第 1 章 數與式 & 第 2 章 指數對數

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題：(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分)

1. () 請選出正確的選項。(A) 若 a 是有理數， b 是無理數，則 ab 必為無理數
(B) 數線上相異三點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(x)$ ，若 $a < b$ 且 $\sqrt{2}(x-b) = \sqrt{3}(a-x)$ ，則 $a < x < b$
(C) 不等式 $|2x+3| > x$ 與不等式 $(2x+3)^2 > x^2$ 的解相同 (D) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$ (E) $0.\bar{9} \geq 1$
2. () 令 $x = 3 + \sqrt{7}$ ， $y = 3 - \sqrt{7}$ ，請選出正確的選項。(A) $xy = 4$ (B) $x^2 + y^2 = 34$
(C) $x^3 + y^3 = 180$ (D) $x^4 + y^4 = 1018$ (E) $(3 + \sqrt{7})^4$ 的整數部分為 1015

二、填充題：(答案均須計算出來，不得以指數型式表示)

(第一部分，每格 4 分)

1. 解方程式 $|x-2| = 3x$ ，得 $x =$ _____。
2. 試求 $(\sqrt{8})^{\frac{-2}{3}} \times (0.25)^{-2.5} \times \sqrt[4]{64} =$ _____。
3. 若 $2^x = 6$ ， $2^y = 3$ ，則 $2^{2x+3y-2} =$ _____。
4. 設 $a = \log 100$ ， $b = 10^{\log 7}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

5. 若已知 $\log 8.9638 = 0.9527$ ，則 $\log 0.089638 =$ _____。

6. 武陵高中奇異鳥身上的羽毛稱為「奇異毛」，若已知 6×10^{13} 根奇異毛的重量約為 405 克，求一根奇異毛的重量為_____克。（用科學記號表示並將係數部分四捨五入取兩位有效數字）

（第二部分，每格 6 分）

7. 設 $3^x = 25$ ， $5^y = 81$ ，則 $xy =$ _____。

8. 設 $a > 0$ 且 $a^{0.7} = 32$ ，則 $a^{0.49} =$ _____。

9. 若 $\frac{2}{\frac{2}{x^2} - 1} + 1 = \sqrt{3}$ ，求實數 x 的值為_____。

10. 若 x, y 為實數並滿足 $x \cdot \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + y \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 10 + 7\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{2}^x = 2^y$ ，求數對 $(x, y) =$ _____。

11. 數線上有兩動點 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，滿足 $|a-3| \leq 1$ 及 $|2b+15| \leq 5$ ，若點 $P(x)$ 在線段 \overline{AB} 上，

且 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$ ，則 x 的範圍以區間表示為_____。

12. 已知聯立不等式 $\begin{cases} |x-1| > 3 \\ |x-a| \leq b \end{cases}$ 的解為 $4 < x \leq 12$ ，則 b 的最大值為_____。

13. 若 $x > 2$ ，求 $\frac{(x-1)^2}{x-2}$ 的最小值為_____。

且每小時增長的倍數固定。

14. 已知培養皿中某細菌的數量每隔 3 個小時就會變為原本的 4 倍，若在培養皿中放入 2 個細菌開始培養，則最少需經過_____小時 (答案請寫整數)，細菌數量才會超過 10000 個。(已知 $10^{0.3} \approx 2$)

三、計算證明題：(共 12 分)

1. 雙十節時小煥去武陵農場玩，去程與回程皆走相同的路線，已知單趟車程距離為 150 公里，若去程的平均時速為每小時 a 公里，回程的平均時速為每小時 b 公里，來回路程的平均時速為每小時 k 公里。試回答下列各題：

(1) 試以 a 、 b 來表示 k 。 (3 分)

(2) 試證明 $k \leq \sqrt{ab}$ 。 (6 分)

(3) 若 $k=60$ ，試求 $a+b$ 的最小值，以及此時的 a 及 b 各為多少？ (3 分)

桃園市立武陵高中 113 學年度第一學期 高一數學 第一次段考

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題（每題 8 分）

1	2

二、填充題：（第一部分每格 4 分）

1	2	3	4	5	6

（第二部分每格 6 分）

7	8	9	10
11	12	13	14

三、計算證明題：（共 12 分）

1 (請標明題號並詳列計算證明過程)

--

桃園市立武陵高中 113 學年度第一學期 高一數學 第一次段考

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題（每題 8 分）

1	2
BE	CE

二、填充題：（第一部分每格 4 分）

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}$	$32\sqrt{2}$	243	(2, 7)	-1.0473	6.8×10^{-12}

（第二部分每格 6 分）

7	8	9	10
8	$8\sqrt{2}$	$\pm(\sqrt{3}-1)$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
11	12	13	14
[-2, 1]	7	4	19

三、計算證明題：（共 12 分）

1 (請標明題號並詳列計算證明過程)

(1) 去程花的時間為 $\frac{150}{a}$ ；回程花的時間為 $\frac{150}{b}$ ， $k = \frac{300}{\frac{150}{a} + \frac{150}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$
 (1分) (1分)

(2) 欲證 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (共 6 分，閱卷老師可自行斟酌給分)

$$(\sqrt{ab})^2 - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = ab \left(1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\right) = ab \left(\frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)^2}\right) = ab \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{ab})^2 \geq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \text{ 又 } \sqrt{ab}、\frac{2ab}{a+b} \text{ 皆為正數，故 } \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

(另解) 由算幾知 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ ， $\frac{2ab}{a+b} = ab \cdot \frac{2}{a+b} \leq ab \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$

(3) 由算幾知 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (等號成立時機為 $a=b$)，又由上題可知 $\sqrt{ab} \geq k$ (等號成立時機也為 $a=b$)，

故 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq k$ ，且當 $a=b$ 時， $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} = k$

若 $k=60$ ，則 $a+b$ 有最小值 120，此時的 $a=b=60$ (共 3 分，閱卷老師可自行斟酌給分)