

市立武陵高中 114 學年度第二學期第二次期中考數學試題卷

範圍：龍騰 ch5、6、8

補充公式：錐體體積 = $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$

一、多重選擇題(每題 9 分，每選項答錯扣 3 分，該題分扣完為止，共 27 分)

() 1、在空間中的敘述哪些是正確的？

(1) 兩平行直線 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{1}$ 與 $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1}$ 的距離為 $\sqrt{2}$ 。

(2) 直線 $\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-7}{3}$ 落在平面 $x-y-z=9$ 上。

(3) 參數式 $\begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \\ z=5+2t \end{cases}$ ， $t \geq 0$ 所決定的射線與平面 $x-y-z=9$ 恰交於一點。

(4) 與直線 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{1}$ 及直線 $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1}$ 皆等距且平行的平面
方程式為 $x+2y+z=8$ 。

(5) 直線 $\frac{x+2}{2} = -y+5 = \frac{z+1}{3}$ 與直線 $\frac{x-6}{-2} = y-1 = z-3$ 恰交於一點。

() 2、若 a 為實數，空間中平面 $E: ax-2y-2z=0$ 與平面 $F: 2x+2y-az=5$ 的夾角之一為 120° ，則下列選項中，哪些可能為 a 的值？

(1) -4 (2) 0 (3) 4 (4) 8 (5) 12。

() 3、若 a 、 b 為實數，下列關於聯立方程式 $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ x-y+2az=4 \\ 2x-2y+4z=b \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(1) 若 $a \neq 1$ ，則聯立方程式恰有一解

(2) 若 $a=1$ ，則聯立方程式有無限多解

(3) 若 $b=8$ ，則聯立方程式有無限多解

(4) 若聯立方程式無解，則 $b \neq 8$

(5) 若聯立方程式有解，則 $b=8$ 。

二、選填題(每大題 6 分，共 60 分)

A、若 a 、 b 、 c 為實數，矩陣 $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & b & 6 \\ 3 & 4 & 2 & c \end{bmatrix}$ 經過列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c=\underline{\textcircled{4}\textcircled{5}}$ 。

B、空間中，兩平面 $E: 12x-6y-4z=-14$ 與 $F: 6x-3y-2z=14$ ，則 E 與 F 的距離=⑥。

C、若 a 、 c 、 d 為實數，空間中直線 $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{1}$ 與點 $A(-3,3,3)$ 決定一平面

$E: ax+y+cz=d$ ，則 $a+c+d=\underline{\textcircled{7}}$ 。

D、空間中，已知直線 $L: \begin{cases} x=3+t \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$ ， t 為實數，兩平面 $E: 2x-2y+z=0$ 與 $F: 2x-2y+z=9$ ，則

直線 L 被兩平面 E 、 F 所截的線段長度為 ⑧ $\sqrt{\textcircled{9}}$ 。

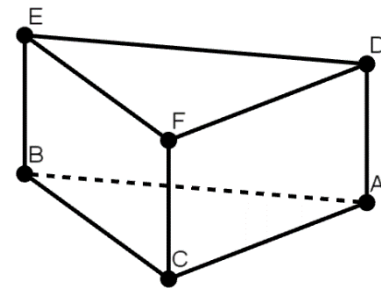
E、若 a 、 b 、 m 、 n 為實數。空間中已知 $A(2,-1,3)$ 、 $B(0,3,1)$ 兩點在平面 $E: 4x+y-2z=1$ 上，若線段 AB 在平面 E 上的中垂線為 $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-2}{3}$ ，則 $a+b = \underline{\textcircled{10}}$ 。

F. 空間中有三點 $A(2,1,3)$ 、 $B(5,4,2)$ 、 $C(1,1,5)$ 與平面 $E: x+my+mz-3=0$ ， m 為實數。若平面 E 與 $\triangle ABC$ 有交點，則 $\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}} \leq m \leq \frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。

G、已知 a 、 b 、 c 為實數，空間中，直線 $L: \begin{cases} x=t \\ y=6-2t \\ z=4-t \end{cases}$ ， t 為實數， P 點為 $(-2,1,0)$ ，若 P 對 L 所作對稱點 Q 的坐標為 (a,b,c) ，則 $a+b+c = \underline{\textcircled{16}\textcircled{17}}$ 。

H、空間中，設 O 為原點，考慮所有過點 $(2,4,2)$ 且與 x 軸正向交於點 $P(6,0,0)$ ，並與 y 軸正向交於點 Q 、與 z 軸正向交於點 R 的平面 E 。在所有滿足條件的平面 E 中，四面體 $OPQR$ 體積的最小值 $= \underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

I、如右圖所示，已知實心三角柱 $ABC-DEF$ 中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 皆為腰長為 6 的等腰直角三角形，四邊形 $ACFD$ 、 $FCBE$ 、 $ABED$ 皆為長方形。 $\angle DFE$ 與 $\angle ACB$ 皆為直角， AD 線段長為 4。



設點 P 為 $\overline{AC}$ 的中點，點 Q 在 $\overline{FD}$ 上且 $2\overline{FQ} = \overline{QD}$ 。若平面 Γ 通過 E 、 P 、 Q 三點，則平面 Γ 與實心三角柱 $ABC-DEF$ 所截圖形的

面積為 $\frac{\textcircled{21}\textcircled{22}}{\textcircled{20}}$ 。

J、已知空間中兩直線 $L_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-8}{-4}$ 與 $L_2 : \frac{x-7}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+7}{-4}$ 互為歪斜線， L 為 L_1 與 L_2 的公垂線。若 A 、 B 兩點分別在 L_1 、 L_2 上，且 A 到 L 的垂直距離為 12， B 到 L 的垂直距離為 15，則 A 、 B 兩點的最短距離為 $\textcircled{23}\sqrt{\textcircled{24}}$ 。

三、混合題(共 13 分，本題答案請寫在答案卷上)

1、證明：空間中點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E : ax + by + cz + d = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。(7 分)

2、利用高斯消去法解聯立方程式：
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - y - 3z = -5 \\ x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$$
。(6 分)

市立武陵高中 104 學年度第二學期第二次期中考數學答案卷

範圍：龍騰 ch5、6、8

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

三、混合題(共 13 分，本題答案請寫在答案卷上)

1、證明：空間中點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。(7 分)

2、利用高斯消去法解聯立方程式：
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - y - 3z = -5 \\ x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$$
。(6 分)

市立武陵高中 104 學年度第二學期第二次期中考數學答案卷

範圍：龍騰 ch5、6、8

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

三、混合題(共 13 分，本題答案請寫在答案卷上)

1、證明：空間中點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。(7 分)

證明：假設 $\vec{n} = (a, b, c)$ 、 $Q(x_1, y_1, z_1)$ 為平面 E 上一點，則 $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$ (2%)

$$\rightarrow \overrightarrow{QP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1),$$

$$\text{故 } d(P, E) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2\%)$$

$$= \frac{|(ax_0 + by_0 + cz_0) - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3\%)$$

2、利用高斯消去法解聯立方程式：
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - y - 3z = -5 \\ x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$$
。(6 分)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-3) \\ \swarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -6 & -26 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-1) \\ \downarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -6 & -26 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{4})}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-2) \\ \swarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4\%, \text{列運算沒有標示者扣 2 分})$$

→無限多解，解為 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ ， t 為實數(2%)

解答：

一、

1.15

2.23

3.14

二、

A. 11

B. 3

C. 7

D. $3\sqrt{3}$

E. 3

F. $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$

G. 13

H. 72

I. $\frac{91}{4}$

J. $9\sqrt{2}$