武 陵 高 中 111 學 年 度 第 二 學 期 高 三 選 修 數 學 甲 第 一 次 期 中 考 試 題 卷

範圍：選修數學甲(上)　第三章、第二章第一節　班級：　　　座號：　　　姓名：

一、單選題 (每格 2 分，共 20 分)

已知在坐標平面上兩點 A(3, 0)、B(–3, 0)，試找出所有滿足下列條件的點 P 所形成的圖形，並將其對應的代碼填在答案紙上。(例如：若圖形為一點，則填入 F)

(A) 線段　(B) 一直線　(C) 兩直線　(D) 一射線　(E) 兩射線　(F) 點　(G) 圓
(H) 拋物線　(I) 橢圓　(J) 雙曲線　(K) 雙曲線的一支　(L) 無圖形

1. 所有滿足 $\overline{PA}=d(P,y\text{軸})$ 的點 P 所形成的圖形為____。

2. 所有滿足 $\overline{PA}=d(P,x\text{軸})$ 的點 P 所形成的圖形為____。

3. 所有滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=8$ 的點 P 所形成的圖形為____。

4. 所有滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=6$ 的點 P 所形成的圖形為____。

5. 所有滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=4$ 的點 P 所形成的圖形為____。

6. 所有滿足 $\overline{PA}-\overline{PB}=8$ 的點 P 所形成的圖形為____。

7. 所有滿足 $\overline{PA}-\overline{PB}=6$ 的點 P 所形成的圖形為____。

8. 所有滿足 $\overline{PA}-\overline{PB}=4$ 的點 P 所形成的圖形為____。

9. 所有滿足 $\overline{PA}-\overline{PB}=0$ 的點 P 所形成的圖形為____。

10. 所有滿足 $\overline{PA}-2\overline{PB}=0$ 的點 P 所形成的圖形為____。

二、多選題 (共 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上選項或未作答得 0 分)

1. 請選出敘述正確的選項。

(A) 若 $(a+2)-5i=-4+(b+3)i$，則 $a=-6,b=-8$。

(B) z 為複數，則 $(z+1)(\bar{z}+1)$ 一定為實數。

(C) 若 $a+b=m$ 且 $ab=n$，則 a,b 為方程式 $x^2-mx+n=0$ 的兩根。

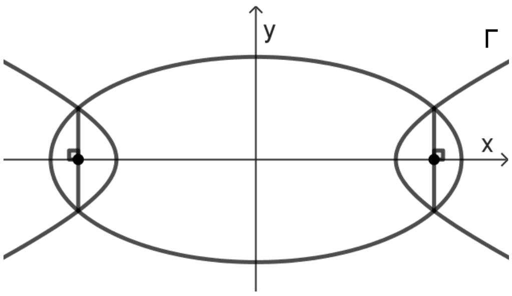
(D) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，a,b,c,d 皆為正數，則 $f(x)=0$ 一定有虛根。

(E) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，a,b,c,d 皆為實數，若 $f(\alpha)=0$ 且 $0<\alpha<1$，則 $f(0)f(1)<0$。

三、填充題 (每格 6 分，共 48 分)

1. 若方程式$x^2-(2i)x-5=0$的兩根為α,β，求$\alpha^2+\beta^2=$____________。

2. 如圖所示(圖僅供參考，並不代表真實比例)，若雙曲線Γ與橢圓$x^2+2y^2=4$共焦點及共正焦弦，求雙曲線Γ的方程式為________________________。



3. 已知拋物線Γ的頂點在y軸上，焦點為(0, 1)，且通過點$P(4,4)$，求拋物線的方程式為________________________。(有兩解，各 3 分)

4. 試求雙曲線$9(x-20)^2-4(y-30)^2-36(x-20)+24(y-30)+36=0$的漸近線方程式為________________________。(有兩條，各 3 分)

5. 坐標平面上有兩點 $A(1,0)$ 、 $B(-1,0)$ ，已知點 P 在第一象限，$\overline{PA}+\overline{PB}=6$，$\overline{PB}$ 交 y 軸於 Q 點

且 $\overline{PQ}:\overline{QB}=2:1$，求 $\overline{PB}$ 長為____________。

6. 設一動圓和 y 軸相切，且與圓 $C:(x+3)^2+y^2=1$ $\boxed{\text{內切}}$，求此動圓之圓心所成圖形的方程式為____________。

7. 已知 3 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+2i)=3+4i$ ，求 $f(x)$ 除以 x^2-2x+5 的餘式為____________。

8. P 為橢圓 $x^2+4y^2=4$ 上動點，已知當 P 坐標為(2, 0)時，P 與點 $A(a,0)$ 的距離有最小值，可求得 a 值的範圍為 $a\geq$____________。

四、混合題 (每題 12 分，每個小題皆為 4 分，共 24 分，未寫出完整過程不予給分)

1. 設 $f(x)=x^3+x-1$，已知 $f(x)=0$ 唯一的實根為 α，試回答下列問題。

(1)若 α 介於連續整數 k 與 k+1 之間，求整數 k 之值。

(請寫出過程及用到的定理名稱)

(2)以牛頓法解 α，接近 α 的初始值為 a_1，過 $(a_1, f(a_1))$ 作切線交 x 軸於 $(a_2,0)$，試以 a_1 表示 a_2 的值。

(即以 $a_2=F(a_1)$ 的形式表示)

(3)承(1)及(2)，設初始值 $a_1=k$，牛頓法的遞迴關係式為 $a_{n+1}=F(a_n)$，試求 a_2 與 a_3 的值。

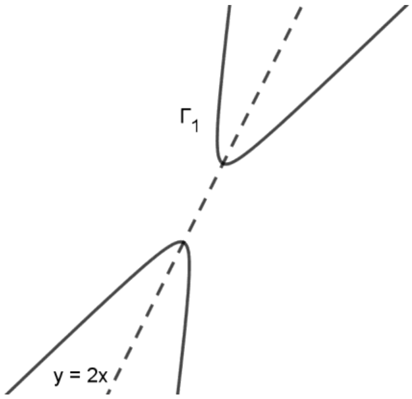
(請以實數表示，勿以 k 表示)

2. 如圖所示(圖僅供參考，並不代表真實比例)，已知雙曲線 $\Gamma_1: 7x^2-8xy+y^2=-9$ 的貫軸所在直線 L 的方程式為 $y=2x$，設 L 與 x 軸正向所夾銳角為 θ，$\boxed{\text{逆時針}}$旋轉 θ 所對應的旋轉矩陣為 R_1，$\boxed{\text{順時針}}$旋轉 θ 所對應的旋轉矩陣為 R_2，試回答下列問題。

(1)試寫出矩陣 R_1 與 R_2。

(2)為將雙曲線 Γ_1 "轉正"，即希望將貫軸所在直線 L 在<u>順時針</u>旋轉 θ 後能落在 x 軸上。故將雙曲線 Γ_1 以原點為中心，<u>順時針</u>旋轉 θ，得到另一個雙曲線 Γ_2，試求 Γ_2 的方程式。

(3)求 Γ_1 的焦點坐標。



武 陵 高 中 **111** 學 年 度 第 二 學 期 高 三 選 修 數 學 甲 第 一 次 期 中 考 答 案 卷

範圍：選修數學甲(上)　第三章、第二章第一節　班級：　　　座號：　　　姓名：

一、單選題 (每格 2 分，共 20 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

二、多選題 (8/5/2/0 分)

1.

三、填充題 (每格 6 分，共 48 分)

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.

四、混合題 (每題 12 分，每個小題皆為 4 分，共 24 分，未寫出完整過程不予給分)

1.	
2.	

武陵高中 111 學年度第二學期高三選修數學甲第一次期中考答案卷

範圍：選修數學甲(上)　第三章、第二章第一節　班級：　　　座號：　　　姓名：

一、單選題 (每格 2 分，共 20 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
H	B	I	A	L	L	D	K	B	G

二、多選題 (8/5/2/0 分)

1.
BC

三、填充題　(每格 6 分，共 48 分)

1.	2.	3.	4.
6	$x^2-y^2=1$	$x^2=4y, x^2=-16(y-5)$	$3x-2y=0,$ $3x+2y=132$
5.	6.	7.	8.
$\frac{11}{3}$	$y^2=-4(x+2)$	$2x+1$	$\frac{3}{2}$

四、混合題　(每題 12 分，每個小題皆為 4 分，共 24 分，未寫出完整過程不予給分)

1.

(1) $f(0)=-1, f(1)=1$ (2 分)，由勘根定理(1 分)，在(0,1)區間必存在實數根 α，故 k =0。(1 分)

(2) $f(a_1)=a_1^3+a_1-1$ (1 分)， $f'(a_1)=3a_1^2+1$ (1 分)，

過 $(a_1, f(a_1))$ 作切線 $y-f(a_1)=f'(a_1)(x-a_1)$，$(a_2,0)$ 代入得

$a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ (1 分，或直接寫出此式得 3 分)，即 $a_2=a_1-\dfrac{a_1^3+a_1-1}{3a_1^2+1}$ (1 分)。

(3)取 $a_1=0$，$a_2=a_1-\dfrac{a_1^3+a_1-1}{3a_1^2+1}=0-\dfrac{-1}{1}=1$ (2 分)，$a_3=a_2-\dfrac{a_2^3+a_2-1}{3a_2^2+1}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ (2 分)。

2.

(1) $\tan\theta=2$ (1 分)，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (1 分)，

$$R_1=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix} \text{(1 分)，} R_2=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix} \text{(1 分)。}$$

(2) $P\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ 逆時針轉 θ 得 $Q=R_1P=\begin{bmatrix}(x-2y)/\sqrt5\\ (2x+y)/\sqrt5\end{bmatrix}$ (1 分)，

$$P(x,y)\in\Gamma_2 \Leftrightarrow Q(\frac{x-2y}{\sqrt5},\frac{2x+y}{\sqrt5})\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 7(\frac{x-2y}{\sqrt5})^2-8(\frac{x-2y}{\sqrt5}\cdot\frac{2x+y}{\sqrt5})+(\frac{2x+y}{\sqrt5})^2=-9 \text{ (2 分)}$$

$\Leftrightarrow P(x,y)$ 滿足 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$。Γ_2 方程式為 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$。(1 分)

(3) Γ_2 焦點為 $(\pm\sqrt{10},0)$ (或解出 c= $\sqrt{10}$，2 分)，逆時針轉 θ 得 $(\sqrt2,2\sqrt2),(-\sqrt2,-2\sqrt2)$ (2 分)。