武陵高中 110 學年度下學期高二數學科第一次期中考題目卷(202-218.220)

範圍：數學第四冊 A. 第一章

一、多選題(1 題 8 分，共 24 分，每題錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上選項或未作答得 0 分)

1. 空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3，其中 E_1 與 E_3 交於 L_1，E_2 與 E_3 交於 L_2，下列敘述何者正確？
(A)L_1 與 L_2 不可能歪斜
(B)若 L_1 與 L_2 相交於一點，則 E_1 與 E_2 必相交於一線
(C)若 L_1 與 L_2 相交於一點且 E_1 與 E_2 相交於一線，則此線必與 E_3 垂直
(D)若 L_1 與 L_2 平行，則 E_1 與 E_2 必相交於一線
(E)若 L_1 與 L_2 平行且 E_1 與 E_2 相交於一線，則此線必與 E_3 平行

2. 空間中有三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,1)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,1)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,1)$，

下列選項中的值何者與 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ 相等？

(A) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ (B) $\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})$ (C) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$

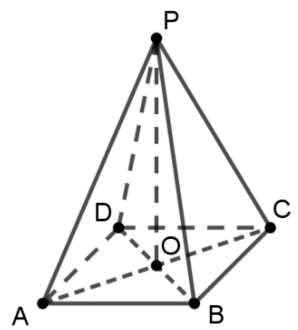
(D) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

3. 空間中有一四角錐 P-$ABCD$，如圖，底面為正方形 $ABCD$，其對角線交於 O，線段 $\overline{OP}$ 與底面 $ABCD$ 垂直。已知 $\overline{OA}=3$，$\overline{OP}=6$，下列選項何者正確？

(A) 線段 $\overline{BC}$ 與面 PAD 平行 (B) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ (C) $|\overrightarrow{PO}\times\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|$

(D) 若四角錐 P-$ABCD$ 的體積為 V，則 $|\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PC})|=\dfrac{V}{2}$

(E) $\overrightarrow{PB}$在$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PC}$上的正射影長度與線段 $\overline{OB}$ 長相等



二、填充題(共 62 分，配分如下表)

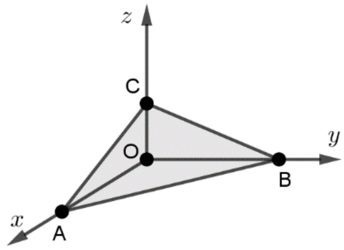
答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	32	38	44	49	54	58	62

1. 已知空間中相異四點 $A(1,2,-2)$，$B(2,4,1)$，$C(2,5,-1)$，$D(2,3,k)$落在同一平面上，則 $k=$ ________

2. 已知空間中三點 $A(1,2,3)$，$B(2,4,1)$，$C(6,2,4)$，若存在點 P 滿足$\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$，$1 \le x \le 2$ 且$-1 \le y \le 1$，試問所有 P 點形成圖形的面積為 ____________

3. 已知空間中三點 $A(3,1,2)$，$B(11,1,-6)$，$C(9,7,2)$，則 C 點在直線 AB 上的投影點坐標為 ________

4. 如圖，空間中已知 O 為原點，另有三點坐標分別為 $A(3,0,0)$、$B(0,4,0)$、$C(0,0,1)$，若三角形 OAB 與三角形 ABC 的夾角為 θ ，求 $\cos\theta =$________。



5. 若$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 45$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$的最小值為________。

6. 空間中，已知由三向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 所決定之平行六面體的體積為 18，則由三向量 $\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{b} + 2\vec{c}$，$\vec{c} + 3\vec{a}$ 所決定之四面體體積為 ____________

7. 圖 7-a 的平行四邊形 $ABCD$ 由六個正三角形組成，將其沿虛線折起來，可得如圖 7-b 所示的六面體，試問：在此六面體中，稜 AB 與稜 CD 所在直線的關係為 ____________
(請回答「平行」、「重合」、「交於一點」或是「歪斜」)

圖 7-a

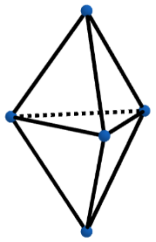


圖 7-b

8. 如圖 8-a，在四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=1$，$\overline{BD}=\sqrt{2}$，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$。今將四邊形 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 折成四面體 A'-BCD，使 $\angle A'DC=90°$，如圖 8-b，若 $\overrightarrow{A'C}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 所夾的銳角為 α，求 $cos\alpha=$ ____________

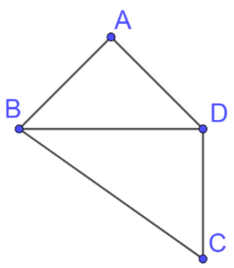


圖 8-a

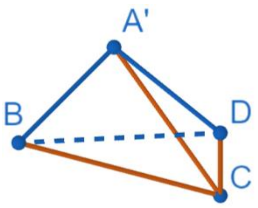
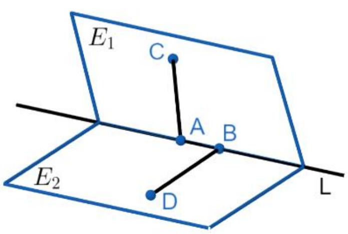


圖 8-b

9. 如圖，空間中兩半平面 E_1，E_2 的夾角為 $60°$，A、B 為兩半平面交線 L 上的相異兩點，$\overline{AB}=1$，已知 C、D 分別落在半平面 E_1，E_2 上，滿足 $\overline{CA}=2$，$\overline{BD}=3$，且 $\overline{CA}$ 和 $\overline{BD}$ 皆垂直 L，則 $\overline{CD}=$ ____________



10. 已知 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 是空間中兩兩垂直的單位向量，$\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}+z\,\overrightarrow{OC}$，且 $x+2y+4z=1$，則 $\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$ 的最小值為 ____________

三、計算證明題(共 14 分) (請詳列計算過程，否則不予計分)

1. 空間中，$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 為兩不平行的非零向量，

(1) 試證明：$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積= $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ (8 分)

(2) 設 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 2，已知外積有下列運算性質：

① $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$

② $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$

求 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積。(6 分)

武陵高中 110 學年度下學期高二數學科第一次期中考答案卷(202-218.220)

範圍：數學第四冊 A. 第一章　　　　班級：_____ 座號：____ 姓名：_________

一、多選題(1 題 8 分，共 24 分，每題錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上選項得 0 分)

1.	2.	

二、填充題(共 62 分，配分如下表)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	32	38	44	49	54	58	62

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

三、計算證明題(共 14 分) (請詳列計算過程，否則不予計分)

1.(1) (8 分)
1.(2) (6 分)

武陵高中 110 學年度下學期高二數學科第一次期中考解答(202-218.220)

範圍：數學第四冊 A. 第一章

一、多選題(1 題 8 分，共 24 分，每題錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上選項得 0 分)

1. ABE	2. ACE	ACE

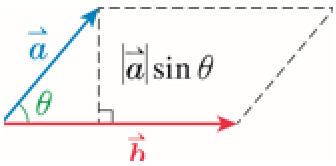
二、填充題(共 62 分，配分如下表)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	32	38	44	49	54	58	62

1. 3	2. 30	3. (6,1,-1)	4. $\frac{12}{13}$	5. 25
6. 21	7. 交於一點	8. $\frac{1}{2}$	9. $2\sqrt{2}$	10. $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

三、計算證明題(共 14 分) (請詳列計算過程，否則不予計分)

1.(1) (8 分)



$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，其夾角為θ，

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 A，則

$$A=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\quad (2\text{ 分})$$

$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}\quad (2\text{ 分})$$

$$=\sqrt{(a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2)+(a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2)+(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2)}\quad (1\text{ 分})$$

$$=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}\quad (1\text{ 分})$$

$$=\sqrt{\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)^2}\quad (1\text{ 分}) = |\vec{a}\times\vec{b}|\quad (1\text{ 分})$$

1.(2) (6 分)

10 [$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})=-5\vec{a}\times\vec{b}$，缺負號扣 1 分，若用圖解亦給分]