

武陵高中 113 學年度第一學期高二數學 A 第二次期中考試題卷

範圍：翰林版數學 3A 第二章 指數與對數函數 班級： 座號： 姓名：

請將每題的答案劃在答案卡相應的位置，例如 ① 表示答案卡位置為 1 的欄位。

一、單選題(每題 5 分，共 15 分)

1. (①)梅森質數是指能表示成 $2^n - 1$ 的質數，記為 M_n 。杜蘭特於 2024 年宣布找出了目前世界上

已知的最大質數 $M_{136279841} = 2^{136279841} - 1$ ，比 2018 年發現的最大質數 $M_{82589933} = 2^{82589933} - 1$ 還多出了

k 位數(例如 131071 比 8191 多出了 2 位數)，則 k 最接近下列何數？

- (1) $136279841 - 82589933$
- (2) $2^{136279841 - 82589933}$
- (3) $2^{136279841} - 2^{82589933}$
- (4) $(136279841 - 82589933)\log 2$ 四捨五入至整數位
- (5) $\log_2(136279841 - 82589933)$ 四捨五入至整數位

2. (②)方程式 $\log_x(3x^2 - 2x) = \log_x x^3$ 的實數解 x 一共有幾個？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5) 以上皆非

3. (③)已知直線 $y = \frac{x}{10}$ 與 $y = \log x$ 的圖形有兩個交點。設 a 、 b 、 c 分別為直線 $y = \frac{x}{10}$ 與

$y = \log(-x)$ 、 $y = \log|-x|$ 、 $y = |\log x|$ 三圖形的交點個數，則 a 、 b 、 c 三數的大小關係為？

- (1) $a = b = c$ (2) $a < b = c$ (3) $a = b < c$ (4) $a < b < c$ (5) $a < c < b$

二、多選題(每題 10 分，答錯一個選項扣 2 分，未作答得 0 分，共 20 分)

4. (④) 假設 $f(x) = (\sqrt{2})^x$ ，其中 x 為實數，請選出下列正確的選項。

- (1) $f(4) = 4$
- (2) $f(3) < 3$
- (3) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = x$ 恰交於一點
- (4) 若 $a > \sqrt{2}$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形沒有交點
- (5) 若 $1 < a < \sqrt{2}$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形恰交於兩點

5. (⑤) 請選出下列正確的選項。($e \approx 2.718$)

- (1) $e^{-e} > 3^{-3}$
- (2) $4^{\log_6 \frac{1}{2}} > 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$
- (3) 已知 $0 < \alpha < \beta$ ，則 $\log(\alpha + \beta) > \frac{1}{2} \log(\alpha\beta) + \log 2$
- (4) 已知 $2^\alpha = 3^\beta$ ，則 $\alpha > \beta$
- (5) 已知 $(\frac{1}{2})^\alpha = \alpha$ ， $(\frac{1}{3})^\beta = \beta$ ，則 $\alpha > \beta$

三、填充題：第一部份(每題 9 分，共 45 分)

A. 設 $x = 5^{\log_3 2}$ ，試求 $3^{\log_5 x} =$ ⑥。

B. $\log_2(\log_2 9) - \log_2(\log_4 5) + \log_2(\log_3 25) =$ ⑦。

C.心理學中的席克法則說明人們在面對決策時，當選項越多，需要決策的時間就越長。阿奇每天早上花在決定要穿哪球鞋出門的時間 T 符合席克法則，可用下列數學式表示：

$$T = 1 + \log_2(n+1), \text{ 其中 } n \text{ 為阿奇的球鞋數量(單位為雙)}。$$

已知目前阿奇有兩雙球鞋，若再購入一雙新球鞋，則阿奇每天早上花在決定穿哪雙鞋的時間將會變成原來的 $\log_a b$ 倍，其中 a, b 皆為小於 10 的正整數。試求數對 $(a, b) = (\underline{8}, \underline{9})$ 。

D.設 a, b 為正實數且 $\log_4 a = 7$ ， $\log_8 b = 5$ ，則與 $\log_2(a+b)$ 之值最接近的整數為 $\underline{10}$ $\underline{11}$ 。

E.摩爾定律是指積體電路上可容納的電晶體數目每個月呈指數成長，每 18 個月便增加一倍。依據摩爾定律，至少要 $\underline{12}$ $\underline{13}$ 個月後，積體電路上可容納的電晶體數目才會超過原來數量的 10 倍。
($\log 2 \approx 0.3010$)

四、填充題：第二部份(每題 4 分，共 20 分)

F. 滿足不等式 $\log_{\frac{1}{10}}(x-20) > \log_{\frac{1}{100}}(336-6x)$ 的整數 x 共有 $\underline{14}$ $\underline{15}$ 個。

G.將 $y = 2^x$ 的圖形以 y 軸為基準線水平伸縮 $\log_a b$ 倍，所得圖形與 $y = 6^x$ 的圖形重合，其中 a, b 皆為小於 10 的正整數，試求 $(a, b) = (\underline{16}, \underline{17})$ 。

H. 設 n 為正整數，若 $(\sqrt{\frac{1}{27}})^n$ 在小數點後第 4 位才開始出現不為 0 的數字，則此不為 0 的數字是 18。
($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

I. 行政院為落實全民節電，於 103 年訂定各機關學校須達成每年節電 1% 以上之目標值，即每年用電量較前一年度減少 1% 以上。假設本校每年都恰好節電 1%，以 102 年用電量為基準，實施第一年(103 年)用電量為 102 年用電量的 99%，實施第二年(104 年)用電量為 102 年用電量的 $99\% \times 99\% = 98.01\%$ ， $\dots$ ，依此類推。則至少實施至第 19 20 年，可達成節電 20% 的目標(即該年用電量小於等於 102 年用電量的 80%)。
($\log 8 \approx 0.9031$ ， $\log 9 \approx 0.9542$ ， $\log 11 \approx 1.0414$)

J. 阿奇儲蓄多年準備在今年買房，銀行評估後能給阿奇的房屋貸款年利率為 2.4%。若阿奇打算每個月的房貸支出最多為 4 萬元，並以 30 年無寬限期採本息平均攤還法還款，即每個月複利一次，每個月繳納相同的金額，分 360 個月還清。則阿奇向銀行貸款的最高金額為 21 22 23 24 萬元。
(單位為萬元，答案請四捨五入至整數位)
($1.024^{30} \approx 2.037$ ， $1.024^{-30} \approx 0.491$ ， $1.002^{360} \approx 2.053$ ， $1.002^{-360} \approx 0.487$)

試題結束，祝各位同學考試順利。