

武陵高中 106 學年度第一學期高二自然組期末考試題卷 (數學)

範圍：2-2、2-3、3-4、柯西不等式

總分:102分, 得分超過100分, 以100分計

一、多重選擇題(24%, 每題8分, 錯一個選項得5分, 錯二個選項得2分, 錯三個選項以上或未作答者得0分)

1. 坐標平面上有一圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, 下列選項哪些正確:

(A) 圓心坐標為 $(-3, 4)$

(B) 圓 C 上的點與直線 $3x + 4y + 33 = 0$ 的最遠距離為 15

(C) 圓 C 上恰有 3 個點與直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 的距離為 1

(D) 直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 被圓 C 所截出的線段長為 $\sqrt{13}$

(E) 過點 $(28, -4)$ 與圓 C 相切的切線段長為 24

2. 實數坐標平面上兩直線 $\begin{cases} L_1: (a_1 + b_1)x + 2b_1y = 3a_1 + 4b_1 \\ L_2: (a_2 + b_2)x + 2b_2y = 3a_2 + 4b_2 \end{cases}$, 以下選項何者正確:

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L_1, L_2$ 交一點 (B) $\begin{vmatrix} 3a_1 + 4b_1 & 2b_1 \\ 3a_2 + 4b_2 & 2b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_1, L_2$ 平行不重合

(C) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & 3a_1 + 4b_1 \\ a_2 + b_2 & 3a_2 + 4b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_1, L_2$ 重合 (D) L_1, L_2 有交點 $(3, \frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & 2b_1 \\ a_2 + b_2 & 2b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

(E) $\begin{cases} 3a_1 + 4b_1 = 0 \\ 3a_2 + 4b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow L_1, L_2$ 斜率皆為 $-\frac{1}{6}$

3. 已知聯立方程組
$$\begin{cases} a_1x + b_1y \geq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ a_3x + b_3y \geq c_3 \\ a_4x + b_4y \leq c_4 \end{cases}$$
，目標函數 $px + qy + r$ ，

其中每個 $a_i, b_i, c_i, i=1,2,3,4, p, q, r$ 皆為實數。試問下列敘述哪些正確？

(A) 若 $c_2 > 0$ ，則 $(0, 0)$ 落在 $a_2x + b_2y \leq c_2$ 的解區域中

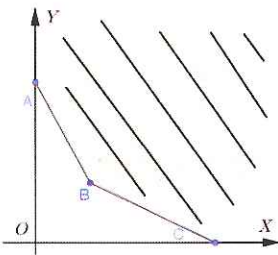
(B) 考慮 $px + qy + r = k$ 的直線， k 為實數。若將直線越往右移，則 k 值越大

(C) 若 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_3x + b_3y = c_3 \\ a_4x + b_4y = c_4 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_4x + b_4y = c_4 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ ，每個方程組

兩直線恰交於一點，所以共有四個交點 D, E, F, G 。則把點 D, E, F, G 分別代入 $px + qy + r$ ，則其中至少有一個值是 $px + qy + r$ 聯立方程組在解區域的最大值。

(D) 若聯立方程組的可行解區域為封閉凸四邊形，則 $px + qy + r$ 在可行解區域的最大值必只發生在此封閉凸四邊形的頂點上。

(E) 若可行解區域如下圖，則 A, B, C 三點，必有一點為 $px + qy + r$ 的最大值或最小值



二、填充題(64% 配分如下表所示)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
所得分數	8	16	24	31	38	45	50	55	58	61	64

1. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2$ ， $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -6$ ， $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -3$ ，則坐標平面上 $A(a_1, a_2)$ ， $B(b_1, b_2)$ ，

$C(c_1, c_2)$ 三點所圍成的三角形面積 = _____。

2. 設 x, y 皆為實數，若 $2x - 9y + 3 = 0$ ，求 $(x-1)^2 + 9(y-2)^2$ 的最小值 = _____。

3. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y + a = 0$ 與直線 $L: 3x + by = c$ 相切於 $A(5, 8)$ ，試求序對 $(a, b, c) =$ _____。

4. 設 x, y 皆為實數，在條件 $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 3 \\ -2 \leq 2x + y \leq 4 \end{cases}$ 的限制下，若 $(x-2)^2 + (y+4)^2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) =$ _____。

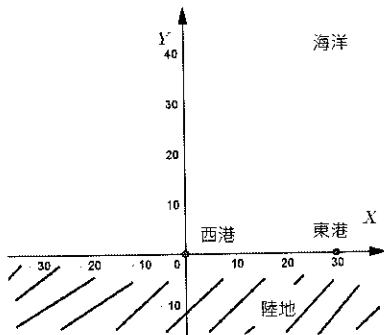
5. 設 x, y 皆為實數，且滿足 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ，則使得 $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$ 為整數的數對 (x, y) 共有幾組? _____。

6. 設圓 $C: (x-5)^2 + (y-7)^2 = 49$ ，若直線 L 過 $P(-6, 4)$ 且與圓 C 所截線段長 = 6，求斜率為正的直線 L 的方程式 _____。

背面有題

7. 坐標平面上有一圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ，有一動點 $P(x, y)$ 在圓外，過 P 作兩條相異直線與圓相切，則此兩相異直線夾角為 60° ，求符合以上描述的所有 P 點軌跡方程式為_____。

8. 如下圖，在地圖的坐標平面上有一個海岸， $y > 0$ 處為海洋， $y \leq 0$ 處為陸地。岸邊有東港、西港兩個港口，西港在 $(0, 0)$ 的位置，東港在 $(30, 0)$ 的位置，兩港口相距 30 海浬。兩個港口各有一隊海難救援隊。但東港海難救援隊的船比較先進，速度是 30(海浬/小時)，西港海難救援隊的船速只有 20(海浬/小時)。若這兩個海難救援隊同時從港口出發，則在這海洋中，西港海難救援隊會比東港海難救援隊早到的海洋的區域面積是_____平方海浬。



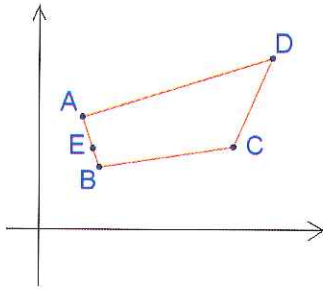
9. 已知坐標平面上有兩定點 $A(6, -2)$ ， $B(-9, 8)$ ，一動點 $P(x, y)$ 。若動點 $P(x, y)$ 的軌跡方程式為 $4x^2 + 9y^2 = 36$ ，求使得 $\triangle ABP$ 面積為最大值時的 P 點坐標_____。

10. 設一線性規劃的可行解區域為如下圖所示四邊形 $ABCD$ 內部(含邊界), 已知直線 AB 的斜率為 -4 , 直線 BC 的斜率為 $\frac{2}{7}$, 直線 CD 的斜率為 3 , 直線 DA 的斜率為 $\frac{5}{8}$

, 目標函數為 $f(x, y) = kx + y - 7$ 。

(1) 若目標函數 $f(x, y)$ 在線段 AB 上(異於 A, B)一點 $E(3, 5)$ 有最小值 m , 則此時數對 $(k, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若求目標函數 $f(x, y)$ 的最大值時, D 點是唯一的解, 則 k 的範圍 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



三、計算證明題(14%, 第一題 6 分, 第二題 8 分)

1. 設圓 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 直線 $L: y = mx + 3$, 試就實數 m 值的範圍討論圓 C 與直線 L 的相交狀況。(6%)

2. 量販店太愛買推出集點贈獎活動, 小琪為了社團活動需買巧克力、餅乾若干個送給 24 個朋友, 每人至少拿到一個(不論巧克力或餅乾都可以)。而太愛買販賣的巧克力為 3 個一袋, 每袋 25 元; 餅乾為 4 個一袋, 每袋 20 元, 但小琪現在只有 180 元。假設小琪分別買了 x 袋巧克力與 y 袋餅乾,

(1) 試著依題目說明, 寫出 x, y 條件限制的聯立不等式(3%)

(2) 承(1), 請將聯立不等式的解區域畫在答案卷上。(2%)

(3) 若每袋巧克力可以集 4 點, 每袋餅乾可以集 2 點。請問, 小琪要分別買多少袋巧克力與多少袋餅乾, 才能集到最多的點數。(3%)

武陵高中 106 學年度第一學期高二自然組期末考答案卷

(總分:102分, 得分超過

班級: _____ 姓名: _____ 座號: _____ 得分: _____

100分, 以100分計)

一、多重選擇題(24%, 每題8分, 錯一個選項得5分, 錯二個選項得2分, 錯三個選項以上或未作答者得0分)

1.	2.	3.
----	----	----

二、填充題(64% 配分如下表所示)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
所得分數	8	16	24	31	38	45	50	55	58	61	64

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.
10.(1)	10.(2)	

三、計算證明題(14%, 第一題6分, 第二題8分)

1.	<p>2. 1.(1)</p> <p>(2)</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>(3)</p>
----	--

武陵高中 106 學年度第一學期高二自然組期末考答案卷

(總分:102分, 得分超過

班級: _____ 姓名: _____ 座號: _____ 得分: _____

100分, 以100分計)

一、多重選擇題(24%, 每題8分, 錯一個選項得5分, 錯二個選項得2分, 錯三個選項以上或未作答者得0分)

1. CE	2. AC	3. A
-------	-------	------

二、填充題(64% 配分如下表所示)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
所得分數	8	16	24	31	38	45	50	55	58	61	64

1. $\frac{5}{2}$	2. 13	3. $(-21, 5, 55)$
4. $(193, \frac{1}{2})$	5. 14	6. $31x - 27y + 294 = 0$
7. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4,$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{3}$	8. 648π	9. $(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$
10.(1) $(4, 10)$	10.(2) $k > -\frac{5}{8}$	

三、計算證明題(14%, 第一題6分, 第二題8分)

<p>1.</p> $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 8 & \text{①} \\ y = mx + 3 & \text{②} \end{cases}$ <p>②代入①得, $(x+1)^2 + (mx+3)^2 = 8,$ 展開整理得 $(m^2+1)x^2 + 2(3m+1)x + 2 = 0$ (1%) 此二次方程式的判別式 $\Delta = [2(3m+1)]^2 - 4 \times 2 \times (m^2+1)$ $= 4(7m^2 + 6m - 1)$ (1%) $= 4(m+1)(7m-1)$. (1%)</p> <p>(1) $m < -1$ 或 $m > \frac{1}{7}$, 圓 C 與直線 L 交於相異兩點。 (1%)</p> <p>(2) $m = -1$ 或 $\frac{1}{7}$, 圓 C 與直線 L 相切於一點。 (1%)</p> <p>(3) $-1 < m < \frac{1}{7}$, 圓 C 與直線 L 不相交。 (1%)</p>	<p>2. (1) $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ 皆為整數} \\ 3x + 4y \geq 24 & (3\%) \\ 25x + 20y \leq 180 \end{cases}$</p> <p>(2) (2%)</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>(3) 4 袋巧克力與 4 袋餅乾(3%)</p>
---	---