

<滿分 104>

一、多選題：(共 16 分;每題全對得 8 分，錯一個扣 3 分)

- 設 $\Gamma = \{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ 且 } |z - 2i| = 1\}$ ，下列哪些點會落在圖形 $\Omega = \{w \mid w = -iz, z \in \Gamma\}$ 上？

(A) 3 (B) $-2i$ (C) $2+i$ (D) $1-i$ (E) $-2-i$
- 甲在袋中放入 3 顆黑球與 1 顆白球，每次取一球再放回袋子，重複進行取球後放回袋子的動作，直到取出白球為止。乙也在同一袋子中，每次取一球後再放回，重複進行取球後放回袋子的動作 100 次，假設每顆球被取出的機率均相等，設隨機變數 X 表示甲取到白球時的總取球次數。而隨機變數 Y 表示乙重複進行取球後放回的動作 100 次後，取出白球的總次數。則下列選項何者正確？

(A) $E(X) = 2$

(B) $E(Y) = 25$

(C) $\text{Var}(X) = 16$

(D) $\text{Var}(Y) = \frac{75}{4}$

(E) $E(X^2) = 28$ 。

二、填充題：(68 分)

| | | | | | | | | | | | |
|------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 給分 | 8 | 16 | 24 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 60 | 64 | 68 |

- 已知 $(7 - 24i)^2 = \frac{(1 + 2i)^3(1 + 7i)^6}{(-2 - i)^5 \cdot z}$ ，試求 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$
- 化減 $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5} = \underline{\hspace{2cm}}$ (以 $a + bi$ 表示， a, b 為實數)

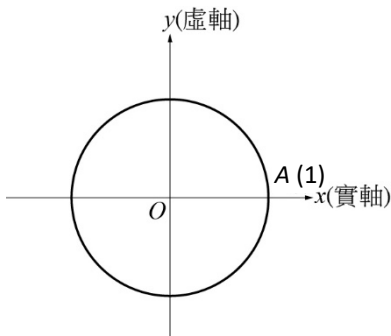
3. (1) 若 $z^2 = -6 - 8i$ ，求 $z =$ _____
- (2) 在複數平面上，複數 z 在第四象限且滿足 $|z| = 1$ 以及 $|-6 - 8i - z^3| = |-6 - 8i - z|$ ，
求 $z =$ _____
4. 將 $-1 - \cos \frac{2\pi}{7} - i \sin \frac{2\pi}{7}$ 寫成極式 _____
5. $A(-1, 3)$ 、 $B(2, 2)$ 、 C 依順時針方向連成一個三角形，已知 $\frac{\overline{AC}}{AB} = 2$ ， $\tan \angle BAC = \frac{4}{3}$ ，
求 C 點座標： _____
6. $Z = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{7+i}$ ，則：
- (1) $(|Z|, \text{Arg}(Z)) =$ _____。
- (2) $n \in \mathbb{Z}, -20 \leq n \leq 100$ ，可使 Z^n 為純虛數之所有整數 n 有 _____ 個。

7. 若複數 z 滿足 $|z-8+6i|+|z|=16$ ，當 z 的虛部 $= \beta$ 時 $|z|$ 有最大值 M ，
求 $(\beta, M) =$ _____
8. 有甲、乙、丙、丁四人玩剪刀、石頭、布的遊戲，設隨機變數 X 表玩一次得勝的人數，求 X 的期望值為_____。
9. 袋中有 1 號球、2 號球、3 號球各 2 個，每球被取的機會均等。今自袋中取三球，令隨機變數 X 表示三球之號碼和，求 X 的變異數為_____。

三、混合&證明題：(20 分)

1. 隨機變數 $X \sim B(n, p)$ ，試證 $E(X) = np$ (8 分)

2. 有一個圓形的荷花池塘，兩隻青蛙在池塘圓周上作規律性的跳動。今建立一複數平面，如附圖，觀察兩隻青蛙的跳動情形。假設兩隻青蛙開始跳動的位置定為 $A(1)$ ，而且甲青蛙沿著圓周依逆時針方向跳動，第 m 次跳到複數 $(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})^m$ 所代表的點；同時乙青蛙沿著圓周依順時針方向跳動，第 n 次跳到複數 $(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})^n$ 所代表的點，其中 m, n 皆為正整數。



(1) 如果甲青蛙第 m 次跳到實軸上，則 m 的值有可能為下列哪些選項？(2 分,全對才給分)

- (A) 3 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 24

(2) 如果甲青蛙每 12 秒跳一次，乙青蛙每 8 秒跳一次，

- A. 每經過多少秒，兩隻青蛙可以同時跳到相同位置？(6 分)
B. 兩隻青蛙是否能在實軸與虛軸上相遇嗎？試說明理由(4 分)

<滿分 104>

一、多選題：(共 16 分;每題全對得 8 分，錯一個扣 3 分)

| | |
|----|----|
| 1. | 2. |
|----|----|

二、填充題：(68 分)

| | | | | | | | | | | | |
|------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 給分 | 8 | 16 | 24 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 60 | 64 | 68 |

| | | | |
|----|----|-------|-------|
| 1. | 2. | 3(1). | 3(2). |
| 4. | 5. | 6(1). | 6(2). |
| 7. | 8. | 9. | |

三、混合&證明題：(20 分)

| | |
|---------|----------|
| 1. (8分) | 2. (12分) |
|---------|----------|

武陵高中 111學年度 高三數學甲期末考 班級_____座號_____姓名_____
 第二學期

一、多選題：(共 16 分;每題全對得 8 分，錯一個扣 3 分)

| | |
|-------|--------|
| 1. AC | 2. BDE |
|-------|--------|

二、填充題：(68 分)

| | | | | | | | | | | | |
|------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 給分 | 8 | 16 | 24 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 60 | 64 | 68 |

| | | | |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------|
| 1. 40 | 2. $-\frac{1}{64} + \frac{\sqrt{3}}{64}i$ | 3(1). $\pm(\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)$ | 3(2). $\frac{1-2i}{\sqrt{5}}$ |
| 4. $2\cos\frac{\pi}{7}(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7})$ | 5. (1, -3) | 6(1). $(1, 150^\circ = \frac{5\pi}{6})$ | 6(2). 20 |
| 7. $(-\frac{39}{5}, 13)$ | 8. $\frac{28}{27}$ | 9. $\frac{6}{5}$ | |

| | | |
|--|--|--|
| | | |
|--|--|--|

三、混合題(20分)

1. (8分)

2. (1) CE (2分,全對才給分)

(2) A. 72秒 (6分)

B. 是 (4分)

設 t 秒會相遇,則甲跳了 $\frac{t}{12}$ 次,乙跳了 $\frac{t}{8}$ 次

$$\frac{t}{12} \times \frac{\pi}{12} + \frac{t}{8} \times \frac{\pi}{6} = 2k\pi \quad (k \in N) \Rightarrow t = 72k \Rightarrow \text{甲停於 } \frac{k}{2}\pi,$$

若 k 為偶數會在實軸相遇,若 k 為奇數則會在虛軸相遇