# 國立武陵高中 106 學年度下高二自然組數學科第二次期中考　試題卷

**範圍：第四冊 CH2～3-3 (轉移矩陣)　二年_____班_____號　姓名：______________**

## 一、填充題（共 52 分，如配分表）

1. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}$，矩陣 $X$ 滿足 $3(X+A-2B)=X+A$，則 $X=$____________.

2. 求兩平行直線 $L_1$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ 與 $L_2$：$\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{6}$ 之間的距離為________________.

3. 試解 $x, y, z$ 的聯立方程式 $\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 6\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 20\\ 1\end{bmatrix}$，則 $(x,y,z)=$____________.

4. 已知正四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 邊所在的直線為 $\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$，$\overline{CD}$ 邊所在的直線為 $\begin{cases}x=3-2t\\ y=1-2t\\ z=1+t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$。若 $\overline{AB}$ 的中點為 $M$，$\overline{CD}$ 的中點為 $N$，則 $\overline{MN}=$________________.

5. 設 $A=\left[a_{ij}\right]_{8\times 10}$ 、$B=\left[b_{ij}\right]_{10\times 9}$ 、$C=\left[c_{ij}\right]_{8\times 9}$ ，其中 $a_{ij}=i^2+2j$ ，$b_{ij}=2i-j$ 。若 $AB=C$ ，則 $c_{24}=$__________.　（已知 $n\in\mathbb{N}$ 時，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ）

6. 假設兩有理數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ （即數列的每一項皆為有理數）滿足 $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ ，其中 $n$ 為正整數。若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求二階方陣 $A=$________.

7. 已知空間中的三個向量 $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$、$\overrightarrow{v}=(a,b,c)$、$\overrightarrow{w}=\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$ 兩兩垂直，且 $\left|\overrightarrow{u}\right|=2\left|\overrightarrow{v}\right|=3\left|\overrightarrow{w}\right|$ 。若 $A=\begin{bmatrix} x & a & -1 \\ y & b & 1 \\ z & c & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$，則 $(BA)^n=$__________.

(請用 $n$ 表示，$n$ 為一正整數)

8. 設增廣矩陣 $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$。已知矩陣的每一種列運算皆可對應成某種矩陣的乘積，

舉例來說，若將矩陣 $M$ 的第一列乘上 4 加到第二列，等同於計算 $EM$，其中 $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

現依照下述步驟對 $M$ 進行列運算，步驟一：第一列乘上 $(-2)$ 加到第二列 $\rightarrow$ 步驟二：第二列乘上 3 加到第三列 $\rightarrow$ 步驟三：第三列乘上 $\dfrac{1}{5}$，最後得到之矩陣為 $N$。已知有一個 3 階方陣 $X$ 滿足 $XM=N$ ，則 $X=$__________.

9. 在 **A** 袋中有 2 黑球 1 白球。小波做一抽球實驗如下：先投擲一枚不公正硬幣（出現正面的機率為 $\frac{2}{3}$），若為正面，則從 **A** 袋中隨機抽出一球丟棄，並另外取一顆同色球放入 **A** 袋；若為反面，則從 **A** 袋中隨機抽出兩球丟棄，並另取 1 黑球 1 白球放入 **A** 袋。以上『投擲硬幣→抽球丟棄→補球』的過程稱為一局實驗。若進行的局數足夠多時，**A** 袋中有 2 黑球 1 白球的機率會趨近於____________.

## 二、多選題（共 32 分，每題 8 分。答錯一個選項得 5 分、兩個選項得 2 分、三個以上或未作答得 0 分）

1. 武林盟的小銓參加打靶射擊訓練，依據過去經驗，當他前一發射擊<u>**命中**</u>靶時，下一發的命中率為 80%；當他前一發射擊<u>**沒有命中**</u>靶時，則下一發的命中率為 40%。假設矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ 表示小銓射擊的轉移矩陣，其中 $a_{11}=$前一發命中時，下一發的命中率；$a_{12}=$前一發未命中時，下一發的命中率。已知小銓的第一發射擊即命中靶，試問下列敘述哪些正確？
   (A) $a_{21}=0.6$
   (B) $\frac{1}{8}\left(A+I_2\right)^3$ 亦為轉移矩陣
   (C) 小銓第 5 發沒有命中靶的機率為 32.48 %
   (D) 若 $A^{10}=\left[p_{ij}\right]_{2\times 2}$，則 $p_{11}$ 可代表連續命中 10 發的機率
   (E) 長期而言，小銓的射擊命中率會趨近於 $\frac{2}{3}$ .

2. 設矩陣 $A$、$B$ 和 $C$ 皆為 $n$ 階非零方陣，$I$ 是 $n$ 階單位方陣，其中 $n$ 為正整數。試問下列哪些敘述恆正確？
   (A) $(A+B)C=AC+BC$
   (B) 若 $A\neq I$ 且 $A\neq -I$，則 $A^3\neq A$
   (C) 若 $AC=BC$，則 $CA=CB$
   (D) 若 $AB=BA=I$，則 $(ACB)^{10}=AC^{10}B$
   (E) $(AB)^2C^2=A^2(BC)^2$ .

3. 設 $a$，$b$，$c$ 為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} ax+6y+3z=9 \\ 4x+by+2z=8 \\ 2x+2y+z=c \end{cases}$的敘述哪些是正確的？

(A) 若 $a\neq 6$ 且 $b\neq 4$，則此線性方程組必為恰有一組解

(B) 若 $a=6$ 且 $b=4$，則此線性方程組有可能為無限多組解

(C) 若 $a=6$ 且 $c=3$，則此線性方程組必為無限多組解

(D) 若此線性方程組為無解，則 $c\neq 3$ 且 $c\neq 4$

(E) 若此線性方程組為無解，則 $a=6$ 或 $b=4$

4. 設空間中直線 $L_1$：$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 5x+4y-3z=1 \end{cases}$ 、$L_2$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ 、$L_3$：$\dfrac{10-2x}{-4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-11}{1}$ 、

$L_4$：$\begin{cases} x=6+2t \\ y=4-5t \\ z=-3+t \end{cases}$ ,$t\in\mathbb{R}$，則下列敘述哪些正確？

(A) $L_1$ 和 $L_2$ 平行

(B) $L_3$ 和 $L_4$ 平行

(C) $L_1$ 和 $L_3$ 相交於一點

(D) $L_2$ 和 $L_4$ 垂直

(E) $L_1$ 和 $L_4$ 歪斜

## 三、計算題（共 16 分，第 1 題 6 分；第 2 題 10 分）

1. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 試證：$A^2-6A+9I_2=O_2$.

(2) 試利用(1)之結果，計算 $2A^4-10A^3+5A^2+23A-9I_2$ 之值。

2. 已知 $k$ 為實數，根據 $k$ 值討論聯立方程組$\begin{cases} 2x+2y+3z=4 \\ x+ky+4z=6 \\ x+2y+(k+2)z=6 \end{cases}$ 解的狀況（回答恰有一解、無解或無限多解。若為無限多解時，則須寫出其解），及其對應之三平面的相交關係為何。

# 國立武陵高中 106 學年度下高二自然組數學科第二次期中考 答案卷

範圍：第四冊 CH2～3-3 (轉移矩陣)　　　　二年____班____號　姓名：______________

一、填充題（共 52 分，如下表所示）

| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 10 | 18 | 25 | 30 | 35 | 40 | 44 | 48 | 52 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | 2. | | 3. | |
| 4. | | 5. | | 6. | |
| 7. | | 8. | | 9. | |

二、多重選擇題（共 32 分。每題 8 分，答錯一個選項得 5 分，答錯兩個選項得 2 分，答錯三個選項以上或未作答者得 0 分）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | 2. | | 3. | | 4. | |

三、計算題（共 16 分，第 1 題 6 分；第二題 10 分）

| | |
|---|---|
| 1. | 2. |

# 國立武陵高中 106 學年度下高二自然組數學科第二次期中考 答案卷

範圍：第四冊 CH2～3-3 (轉移矩陣)　　　　二年____班____號　姓名：__________

一、填充題（共 52 分，如下表所示）

| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 10 | 18 | 25 | 30 | 35 | 40 | 44 | 48 | 52 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$ | **2.** | $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ | **3.** | $(3,-1,2)$ |
| **4.** | 3 | **5.** | 1380 | **6.** | $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{bmatrix} 36^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}$ | **8.** | $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{-6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ | **9.** | $\dfrac{1}{2}$ |

二、多重選擇題（共 32 分。每題 8 分，答錯一個選項得 5 分，答錯兩個選項得 2 分，答錯三個選項以上或未作答者得 0 分）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | BCE | **2.** | AD | **3.** | AE | **4.** | BCE |

三、計算題（共 16 分，第 1 題 6 分；第二題 10 分）

**1.**

(1) 略 (2 分)

(2) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (4 分)

**2.**

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & k & 4 \\ 1 & 2 & k+2 \end{vmatrix}=(k-2)(2k+3)$ …………(1 分)

(i) 當 $k\neq 2$ 且 $k\neq \frac{-3}{2}$ 時，方程式<u>恰有一解</u>，

此時<u>三平面相交於一點</u>；…………(2 分)

(ii) 當 $k=\frac{-3}{2}$ 時，方程式<u>無解</u>，

此時<u>三平面兩兩交於一線且三線平行</u>；…………(2 分)

(iii) 當 $k=2$ 時，方程式<u>無限多解</u>，解為 $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4-5t \\ z=2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$，………(2 分)

此時<u>兩平面重合且與第三個平面交於一線</u>。…………(3 分)