301－318，320

市立武陵高級中學 110 學年度下學期　高三(數甲)期末考　三年級　班　號 姓名

一、計算混合題：(共 42 分)

第1-3題為題組(一)

若以牛頓法求 $f(x)=x^2-5=0$ 方程式的正根

步驟 1：因為 $f(2)f(3)<0$，故此正根介於 2 與 3 之間，取 $a_1=2$

步驟 2：過 $y=f(x)$ 上點 $P(2,f(2))=(2,-1)$ 作 $y=f(x)$ 的切線

1.該切線方程式為何？____________________ **(5分)**

2.步驟 3：步驟 2 中的切線和 x 軸交點的 x 坐標 x_0，令其為 $a_2=x_0$，

求$a_2=$____________________**(5分)**

重複步驟 2 與 3：過 $y=f(x)$ 上點 $Q(a_2,f(a_2))$ 作 $y=f(x)$ 的切線，並求其與 x 軸交點的 x 坐標，令其為 a_3

3.反覆步驟 2 與 3 可得一數列 a_1，a_2，a_3，a_4，……，則選出下列正確的選項。

(多選題)____________**(8分，每答錯一個選項扣3分，直到8分扣完為止，不作答者不給分。)**

(1)對於所有正整數 n，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{5}{2a_n}$ 均成立

(2)對於所有正整數 n，$a_n\geq\sqrt{5}$ 均成立

(3) $\langle a_n\rangle$必遞減

(4)存在正整數 n 使得 $a_n<\sqrt{5}$

(5)$\langle a_n\rangle$收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{5}$

第4-5題為題組(二)

我們通常會認為「硬幣是均勻的」，但現有一枚硬幣，在實驗過程中，我們懷疑此枚硬幣出現正面的機率 $p\neq\dfrac{1}{2}$，今利用此硬幣出現正面的次數去檢定這項假設的合理性，並列出前三個步驟如下：

①假設「這是一枚均勻硬幣」（即 $p=\dfrac{1}{2}$）。

②確立檢定統計量為「丟一枚硬幣 20 次出現正面的次數」。

③設定顯著水準為 0.001。

在檢定的過程中， 令隨機變數 X 表示正面出現的次數，利用所附的 X 的機率分布表回答以下問題。

4. 求隨機變數 X 的拒絕域。**(6 分)**______________

5. 若試驗的結果為正面出現的次數為 17 次，則是否拒絕「這是一枚均勻硬幣」

背面有題

的假設？(單選，2 分)______________ (1)拒絕 (2)不拒絕

k	$P(X \le k)$	$P(X>k)$	k	$P(X \le k)$	$P(X>k)$
20	1.0000000000	0.0000000000	9	0.4119014740	0.5880985260
19	0.9999990463	0.0000009537	8	0.2517223358	0.7482776642
18	0.9999799728	0.0000200272	7	0.1315879822	0.8684120178
17	0.9997987747	0.0002012253	6	0.0576591492	0.9423408508
16	0.9987115860	0.0012884140	5	0.0206947327	0.9793052673
15	0.9940910339	0.0059089661	4	0.0059089661	0.9940910339
14	0.9793052673	0.0206947327	3	0.0012884140	0.9987115860
13	0.9423408508	0.0576591492	2	0.0002012253	0.9997987747
12	0.8684120178	0.1315879822	1	0.0000200272	0.9999799728
11	0.7482776642	0.2517223358	0	0.0000009537	0.9999990463
10	0.5880985260	0.4119014740			

第 6-7 題為題組(三)

設複數平面上的點 A_k 分別對應到 1 的 8 個八次方根

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{8} + i\sin\frac{2k\pi}{8},\ k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \text{ 。}$$

一隻兔子從 A_0 開始，依序跳到下列各點：

$$A_1, A_2, \ldots, A_6, A_7, A_0, A_1, A_2, \ldots \text{ 。}$$

6.選出所有正確的選項。

(多選題)____________(8 分)(**每答錯一個選項扣 3 分，直到 8 分扣完為止，不作答者不給分。**)

(1)不論兔子怎麼跳，都會落在單位圓上。

(2) Arg $\left(\frac{A_1}{A_3}\right)$(即複數 $\frac{A_1}{A_3}$ 的主幅角)＝90°

(3)兔子跳 110 次後的位置會落在第四象限上。

(4)兔子跳了 110 次，其中總共有 13 次落在第一象限上。

(5)四邊形 $A_2A_3A_6A_7$ 的面積為 $\sqrt{2}$ 。

7.有一隻烏龜在點 $P(2+0i)$ 觀察這隻兔子的跳躍，請幫牠計算出 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \overline{PA_3} \times \overline{PA_4} \times \overline{PA_5} \times \overline{PA_6} \times \overline{PA_7}$ 之值為何? **(8 分)**

(須詳列計算過程否則不予計分)

二、填充題：(共 42 分，每格 6 分)

1. 若$\left(-\sin\frac{2\pi}{7}+i\cos\frac{2\pi}{7}\right)^7\times(1-i)^4=a+bi$，其中$a,b$均為實數，

求數對$(a\ ,\ b)$__________。

2. 已知實係數方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$有一實根為-4，且與另兩複數根在複數平面上與原點形成一個正方形，試求$a+b+c$之值 __________ 。

3. 在坐標平面上，已知$y=x^3-2x^2-7x$的圖形與$y=x^2+2x+k$的圖形至多有二個相異的交點，求實數k的範圍__________。

4. 設隨機變數X的機率質量函數如下表所示:
若已知 $E(X)=0.1$ 且隨機變數$Y=10(X-0.1)$，求 $\mathrm{Var}(Y)=$__________。

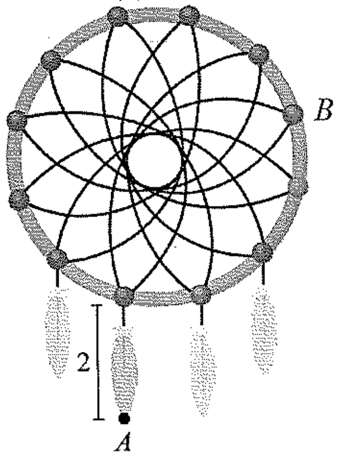
x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	p_1	$\frac{1}{4}$	p_2	$\frac{1}{20}$

5. 為防止風沙危害，市政府決定建設防護綠帶，種植木麻黃，並提出獎勵措施，鼓勵民眾參與。已知各棵木麻黃存活與否是互相獨立的，且一年後各棵存活率均相同。阿燦為了響應政策，一次種植了n 棵木麻黃。根據資料，阿燦計算出一年後存活棵樹的期望值為 2 棵，標準差為$\frac{2\sqrt{3}}{3}$棵。請求出這n 棵木麻黃一年後有 2 棵或 2 棵以上存活的機率 __________ 。

6. 籃球校隊甄選隊員流程如下：參加者先在A處投第一球，接著在B處投第二球；若這兩球都進球，則停止投籃，否則最後在B處投第三球。已知在A與B兩處每投進一球分別得 4 分與 3 分，且某生在A與B兩處的命中率分別為$\frac{1}{4}$與$\frac{2}{3}$。設隨機變數X表示該生甄選時所得的分數，求 $E(X)$__________。

背面有題

7. 下圖的捕夢網為北美文化中常見的手工藝品，圓上的十二個珠子構成正十二邊形，圓形下方垂掛四根羽毛作為裝飾。將此捕夢網的圓心貼合在複數平面的原點，且設第二根羽毛末端為 A 點。已知 B 點珠子所對應的複數為 $6+2i$，且每根羽毛的長度均為 2。求 A 點所對應的複數。



三、多重選擇題：(共 16 分，每題 8 分，每答錯一個選項扣 3 分，直到 8 分扣完為止，不作答者不給分。)

1. 設多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a,b,c 均為實數。請選出正確的選項。

(1) 若 $f(2+i)=f(2-i)$，則函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點

(2) 若 $f(0)f(1)<0<f(0)f(2)$，則方程式 $f(x)=0$ 可能有一個實根，二個虛根

(3) $f(x^2-4x+3)=0$ 至少有一實根

(4) 存在實數 a,b,c 使得 $f(1),f(2),f(3)$ 依序形成等差數列

(5) 存在實數 a,b,c 使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列

2. 美國國家籃球協會（NBA）的季後賽採七戰四勝制，每支球隊將與對手最多進行 7 場比賽，最先贏得 4 場比賽的球隊將進入下一輪，而敗者被淘汰。已知甲乙兩隊過往戰績的勝場比例為 3：1，預測接下來每場勝負的機率也都是 3：1，且每場勝負都是獨立事件。令隨機變數 X 為到分出勝負為止甲隊的獲勝場數，隨機變數 Y 為到分出勝負為止所需比賽場數，則下列哪些敘述正確？

(1) $P(X=0)=\dfrac{81}{256}$ (2) $P(X=3)<P(X=4)$ (3)甲隊以 4 勝 1 負晉級的機率為 $\dfrac{405}{1024}$

(4) $P(Y=5)=\dfrac{21}{64}$ (5) $P(Y=5)<P(Y=6)$。

301-318, 320

市立武陵高級中學 110 學年度下學期　高三數甲期末考答案卷　　三年級　　班　　號　姓名

一、計算混合題：(共 42 分)

題組(一)(1. **5** 分　2. **5** 分　3. **8** 分，**每答錯一個選項扣 3 分，直到 8 分扣完為止)**

1. $y=4x-9$	2. $\frac{9}{4}$	3. 145

題組(二)(4. **6** 分　5. **2** 分　)

4. X=0,1,2, 18,19,20	5. 2

題組(三)(6. **8** 分，**每答錯一個選項扣 3 分，直到 8 分扣完為止)**

6. 15

7. **8 分(須詳列計算過程否則不予計分)**

$\because f(x)=(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)(x-z_5)(x-z_6)(x-z_7)$

$=x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ ....**1 分**

$\therefore f(2)=(2-z_1)(2-z_2)(2-z_3)(2-z_4)(2-z_5)(2-z_6)(2-z_7)$

$=2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ ....**2 分**

$=255$ ....**1 分**

故 $\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\overline{PA_3}\times\overline{PA_4}\times\overline{PA_5}\times\overline{PA_6}\times\overline{PA_7}$

$=|2-z_1||2-z_2||2-z_3||2-z_4||2-z_5||2-z_6||2-z_7|$ ....**2 分**

$=|(2-z_1)(2-z_2)(2-z_3)(2-z_4)(2-z_5)(2-z_6)(2-z_7)|$ ....**1 分**

$=|255|=255$ ....**1 分**

二、填充題：(共 42 分，每格 6 分)

1. (0，4)	2. 64	3. $k\le -27$ 或 $k\ge 5$
4. 179	5. $\frac{473}{729}$	6. $\frac{14}{3}$
7. $(-3+\sqrt{3})-(3+3\sqrt{3})i$		

三、多重選擇題：(共 16 分，每題 8 分，每答錯一個選項扣 3 分，直到 8 分扣完為止)

1. 45	2. 24