

113 學年度高三數甲(上)第一學期 武陵高中 期末考

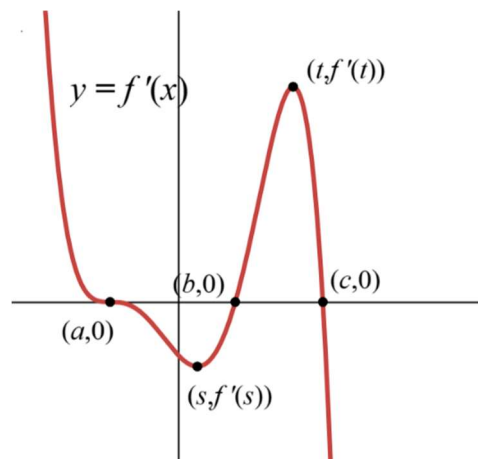
班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

一、多重選擇題（每題 8 分，共 16 分）

1. () 設 $y=f(x)$ 的圖形(正值函數)與 x 軸及 $x=0, x=2$ 所圍成的區域為 R ，將閉區間 $[0,2]$ 等分成 n 等分，並設 R 的面積之上和為 U_n ，下和為 L_n ，則下列何者一定正確？
- (1) $U_3 \geq L_3$ (2) $U_3 \geq U_6$ (3) $U_2 \geq U_3$ (4) $U_{33} \geq L_{44}$ (5) $L_5 \geq L_3$

2. () 設多項式函數 $y=f'(x)$ 的圖形如右圖，與 x 軸的交點為 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 與 $(c, 0)$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $\int_a^c f'(x) dx > 0$
- (2) $\int_a^c f''(x) dx < 0$
- (3) $\int_a^c f'''(x) dx > 0$
- (4) $f(x)$ 在 $x=s$ 有極小值
- (5) $f(x)$ 在 $x=b$ 有極小值



二、選填題（所有分數務必化成最簡分數,共 70 分）

第一部分(每小題 8 分*5)

1. $\int_{-2}^5 |2x-3| + |x+1| dx = \underline{\textcircled{3}} \underline{\textcircled{4}}$

2. 設 $y = x^2 + 1$ 的圖形與直線 $y = 0, x = 2, x = 4$ 所圍成區域為 S ，其上和為 U_{4n} ，下和為 L_{4n} 。

若 $U_{4n} - L_{4n} < 0.01$ ，則 n 的最小值為 ⑤⑥⑦。

3. 已知拋物線 $\Gamma: y = x^2$ 與直線 $L: y = x + 2$ ，由 L 與 Γ 所圍區域繞 x 軸旋轉一周所得之旋轉體的

體積為 $\frac{⑧⑨}{⑩} \pi$ (化成最簡分數)

4. 農場高中儲水塔漏水，小武校長想了解平均每小時的漏水量，早上開始以速度函數 $v(t) = -t^2 + t + 5$ (公升/小時) 補水。已知經過 2 小時後，水塔裡的水量剛好不增不減(期間

水並無向外溢流或見底現象)。請幫忙校長計算，平均每小時的漏水量為 $\frac{⑪⑫}{⑬}$ (公升/小時)。(化成最簡分數)

5. 設 a 為實數， $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t) dt = (x^2 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} - 8$ ，所有可能的 a 之總和 $= A$ ，試求

數對 $(f(3), A) =$ $(\frac{⑭\sqrt{⑮}}{⑯}, ⑰)$

第二部分(每小題 5 分*6)

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{9 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2} = \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}} \pi$$

$$7. \text{實係數多項函數 } f(x) \text{ 滿足 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(2x^2+1)(x^2-7)} = \frac{5}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-5}{x} = 17, f''(0) = 0$$

$$\text{, 求 } \int_{-2}^2 f(x) dx = \underline{\textcircled{20} \textcircled{21}}$$

8. 設實係數三次多項式函數 $\Gamma: y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $A(2,t)$ 為其圖形的反曲點, 且此圖形在 $A(2,t)$ 的切線為 $y = 2x$,

$$(1) \text{ 求數對 } (t, \int_{-1}^5 f(x) dx) = (\underline{\textcircled{22}}, \underline{\textcircled{23} \textcircled{24}})$$

$$(2) \text{ 若 } \Gamma \text{ 的圖形與 } y=t \text{ 所圍的封閉區域面積為 } 6 \text{。求 } a = \frac{\textcircled{25} \textcircled{26}}{\textcircled{27}} \text{。}$$

9. 已知 $f(x) = (x-20)^2 + 67$,

$$S(1) = \sum_{k=1}^{10} f(k) , S(2) = \sum_{k=0}^9 f(k) , S(3) = \sum_{k=1}^{10} \frac{f(k-1) + f(k)}{2} ,$$

$$S(4) = \int_0^{10} f(x) dx , S(5) = \int_1^{11} f(x) dx ,$$

試比較上列各數之大小: $S(\underline{28}) < S(\underline{29}) < S(\underline{30}) < S(\underline{31}) < S(\underline{32})$

10. $V(t)$ 表示 $x^2 + (y-5)^2 = 9$ 與 y 軸及 $x = t$ (其中 $0 < t < 3$) 圍成的封閉區域繞 x 軸旋轉的旋轉體

體積, 求 $V'(1) = \underline{33} \underline{34} \sqrt{\underline{35}} \pi$ (化為最簡根號)

三、計算題 (共 14 分)

1. 已知函數 $\Gamma: y = f(x) = x^3 - 7x + 6$, 自點 $A(-1, 8)$ 對 $f(x)$ 作切線 L , L 與 Γ 所圍封閉區域為 Ψ ,

(1) L 之方程式為 _____ (5 分)

(2) Γ 與 L 交於 $B(b, f(b))$, $C(c, f(c))$, B, C 在 x 軸的投影點分別為 $P(b, 0)$, $Q(c, 0)$ 其中

$b < c$, 將線段 $\overline{PQ}$ 的 n 等分點沿著向量 PQ 的方向依序設為 $P = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = Q$ 。

考慮通過每一個 P_k 的鉛直線與此封閉區域 Ψ 所截的每一條等寬的長條面積。

請利用此切長條方法寫下估計 Ψ 面積的黎曼和 S_n (以 $\sum$ 表示, 不需化簡)

(4 分)

(3) 以定積分形式表示 Ψ 的面積並求其值. (5 分)

113 學年度高三數甲(上)第一學期武陵高中期末考非選答案卷

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

三、計算題 (共 14 分)

1. 已知函數 $\Gamma: y = f(x) = x^3 - 7x + 6$ ，自點 $A(-1, 8)$ 對 $f(x)$ 作切線 L ， L 與 Γ 所圍封閉區域為 Ψ ，
(1) L 之方程式為 _____ (5 分)

- (2) Γ 與 L 交於 $B(b, f(b))$ ， $C(c, f(c))$ ， B, C 在 x 軸的投影點分別為 $P(b, 0)$ ， $Q(c, 0)$ 其中 $b < c$ ，將線段 $\overline{PQ}$ 的 n 等分點沿著向量 PQ 的方向依序設為 $P = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = Q$ 。考慮通過每一個 P_k 的鉛直線與此封閉區域 Ψ 所截的每一條等寬的長條面積。請利用此切長條方法寫下估計 Ψ 面積的黎曼和 S_n (以 $\sum$ 表示，不需化簡) (4 分)

- (3) 以定積分形式表示 Ψ 的面積並求其值。 (5 分)

113 學年度高三數甲(上)第一學期 武陵高中 期末考

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

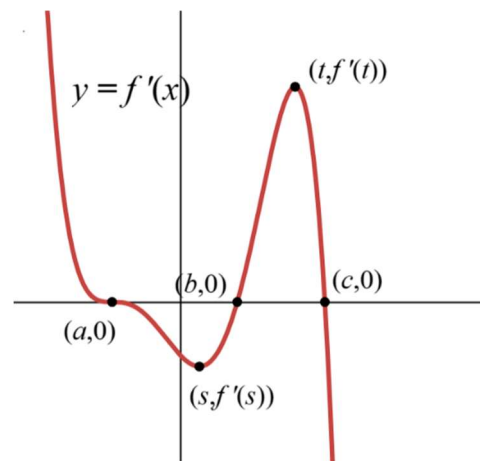
一、多重選擇題（每題 8 分，共 16 分）

1. (124) 設 $y=f(x)$ 的圖形(正值函數)與 x 軸及 $x=0, x=2$ 所圍成的區域為 R ，將閉區間 $[0,2]$ 等分成 n 等分，並設 R 的面積之上和為 U_n ，下和為 L_n ，則下列何者一定正確？

(1) $U_3 \geq L_3$ (2) $U_3 \geq U_6$ (3) $U_2 \geq U_3$ (4) $U_{33} \geq L_{44}$ (5) $L_5 \geq L_3$

2. (15) 設多項式函數 $y=f'(x)$ 的圖形如右圖，與 x 軸的交點為 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 與 $(c, 0)$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $\int_a^c f'(x) dx > 0$
 (2) $\int_a^c f''(x) dx < 0$
 (3) $\int_a^c f'''(x) dx > 0$
 (4) $f(x)$ 在 $x=s$ 有極小值
 (5) $f(x)$ 在 $x=b$ 有極小值



二、選填題（分數務必化成最簡分數,共 70 分）

第一部分(每小題 8 分*5)

1. $\int_{-2}^5 |2x-3| + |x+1| dx = \underline{\textcircled{3}} \underline{\textcircled{4}} \quad 43$

2. 設 $y = x^2 + 1$ 的圖形與直線 $y = 0, x = 2, x = 4$ 所圍成區域為 S ，其上和為 U_{4n} ，下和為 L_{4n} 。

若 $U_{4n} - L_{4n} < 0.01$ ，則 n 的最小值為 ⑤⑥⑦。601

3. 已知拋物線 $\Gamma: y = x^2$ 與直線 $L: y = x + 2$ ，由 L 與 Γ 所圍區域繞 x 軸旋轉一周所得之旋轉體的

體積為 $\frac{\textcircled{8}\textcircled{9}}{\textcircled{10}} \pi$ (化成最簡分數)

$$\frac{72\pi}{5}$$

4. 農場高中儲水塔漏水，小武校長想了解平均每小時的漏水量，早上開始以速度函數

$v(t) = -t^2 + t + 5$ (公升/小時) 補水。已知經過 2 小時後，水塔裡的水量剛好不增不減(期間

水並無向外溢流或見底現象)。請幫忙校長計算，平均每小時的漏水量為 $\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ (公升/小時)。(化成最簡分數)

$$\frac{14}{3}$$

5. 設 a 為實數， $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t) dt = (x^2 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} - 8$ ，所有可能的 a 之總和 $= A$ ，試求

數對 $(f(3), \frac{\textcircled{14}\sqrt{\textcircled{15}}}{\textcircled{16}})$ 。 $(\frac{9\sqrt{5}}{2}, 3)$

第二部分(每小題 5 分*6)

$$6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{9 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2} = \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}} \pi \qquad \frac{3}{4} \pi$$

$$7. \text{實係數多項函數 } f(x) \text{ 滿足 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(2x^2+1)(x^2-7)} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-5}{x} = 17, \quad f''(0) = 0$$

$$\text{, 求 } \int_{-2}^2 f(x) dx = \underline{\textcircled{20}\textcircled{21}} \quad 84$$

8. 設實係數三次多項式函數 $\Gamma: y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $A(2,t)$ 為其圖形的反曲點, 且此圖形在 $A(2,t)$ 的切線為 $y = 2x$,

$$(3) \text{ 求數對 } (t, \int_{-1}^5 f(x) dx) = (\underline{\textcircled{22}}, \underline{\textcircled{23}\textcircled{24}}) \quad (4, 24)$$

$$(4) \text{ 若 } \Gamma \text{ 的圖形與 } y=t \text{ 所圍的封閉區域面積為 } 6 \text{。求 } a = \frac{\textcircled{25}\textcircled{26}}{\textcircled{27}} \text{。} \qquad \frac{-1}{3}$$

9. 已知 $f(x) = (x-20)^2 + 67$,

$$S(1) = \sum_{k=1}^{10} f(k) , S(2) = \sum_{k=0}^9 f(k) , S(3) = \sum_{k=1}^{10} \frac{f(k-1) + f(k)}{2} ,$$

$$S(4) = \int_0^{10} f(x) dx , S(5) = \int_1^{11} f(x) dx ,$$

試比較上列各數之大小: $S(\underline{28}) < S(\underline{29}) < S(\underline{30}) < S(\underline{31}) < S(\underline{32})$

$$S(\underline{5}) < S(\underline{1}) < S(\underline{4}) < S(\underline{3}) < S(\underline{2})$$

10. $V(t)$ 表示 $x^2 + (y-5)^2 = 9$ 與 y 軸及 $x = t$ (其中 $0 < t < 3$) 圍成的封閉區域繞 x 軸旋轉的旋轉體體

積, 求 $V'(1) = \underline{\textcircled{33} \textcircled{34} \sqrt{\textcircled{35}}} \pi$ (化為最簡根號)

$$V'(1) = 40\sqrt{2}\pi$$

三、計算題 (共 14 分)

1. 已知函數 $\Gamma: y = f(x) = x^3 - 7x + 6$, 自點 $A(-1, 8)$ 對 $f(x)$ 作切線 L , L 與 Γ 所圍封閉區域為 Ψ ,
(1) L 之方程式為 _____ (5 分) $y = -4x + 4$

(2) Γ 與 L 交於 $B(b, f(b))$, $C(c, f(c))$, B, C 在 x 軸的投影點分別為 $P(b, 0)$, $Q(c, 0)$ 其中 $b < c$, 將線段 $\overline{PQ}$ 的 n 等分點沿著向量 PQ 的方向依序設為 $P = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = Q$ 。考慮通過每一個 P_k 的鉛直線與此封閉區域 Ψ 所截的每一條等寬的長條面積。請利用此切長條方法寫下估計 Ψ 面積的黎曼和 S_n (以 $\sum$ 表示, 不需化簡) (4 分)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} \left[\left(-2 + \frac{3k}{n} \right)^3 - 3 \left(-2 + \frac{3k}{n} \right) + 2 \right]$$

(3) 以定積分形式表示 Ψ 的面積並求其值. (5 分) $\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}$