

武陵高中 114 學年度第一學期高三數學乙第二次期中考試題卷

範圍：選修數學乙(上)第二章

班級： 座號： 姓名：

一、多選題(每題 8 分，錯 1 個選項 5 分、錯 2 個選項 2 分，錯 3 個選項以上 0 分，共 24 分)

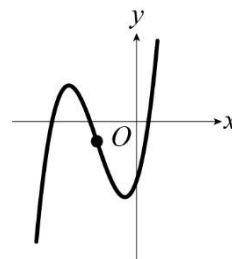
1. 下列哪些函數在 $x=0$ 處可微分？ (A) $f(x)=x$ (B) $f(x)=|x-1|$
(C) $f(x)=[x]$ ， $[x]$ 表高斯符號 (D) $f(x)=x|x|$ (E) $f(x)=x[x]$

2. 已知函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=(x+3)(1-x)$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (A) $f(x)$ 為三次多項式且最高次項係數為負 (B) $f(x)$ 在區間 $[-3,1]$ 遞增
(C) $f(x)$ 在 $x=3$ 有最小值 (D) $(-1, f(-1))$ 為 $f(x)$ 圖形的反曲點 (E) $f(x)$ 與 x 軸恰交於一點。

3. 右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，其中黑點為反曲點，選出正確的選項。

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $b^2 - 3ac > 0$



二、填充題(每小題 5 分，共 60 分)

1. 已知 $f(x)=x^3-x^2+x+5$ ，求

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 利潤函數 $P(x)$ 定義為 $P(x) = R(x) - C(x)$ ，其中 $R(x)$ 與 $C(x)$ 分別表示總收益及總成本函數，而 x 為該商品的生產或銷售數量。而利潤函數 $P(x)$ 的導函數 $P'(x)$ 為邊際利潤函數，即生產並銷售 x 件產品時，邊際利潤 $P'(x) \approx P(x+1) - P(x)$ 。
 已知某年奇異果生產 x 公斤時的成本函數 $C(x) = 30x + 40$ ，而賣到果菜市場 100 公斤內的收益函數為 $R(x) = -0.2x^2 + 80x$ 。試回答下列問題：

- (1) 該年奇異果 100 公斤內的利潤函數 $P(x)$ 為何？
- (2) 求賣量從 60 公斤增加到 61 公斤的利潤約增加多少元？(邊際利潤)

3. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 且滿足 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 1}{x - 5} = \frac{1}{4}$ ，試求 $f(x)$ 的圖形上以 $(5, f(5))$ 為切點的切線方程式。

4. 若函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 圖形的反曲點為 $(-1, 2)$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

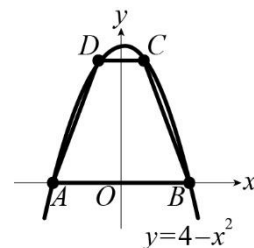
5. 設 $y = x^3 - 3x^2 + ax + 1$ 在 $x \in R$ 實數上為遞增函數，求實數 a 的範圍為_____。

6. 求 $y = \sqrt{9 - x^2}$ 以點 $P(2, \sqrt{5})$ 為切點的切線斜率為_____。

7. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 處有極大值 3，且此函數圖形在點 $(-1,0)$ 與直線 $y=7x+7$ 相切，
則 $f(x)=$ _____。

8. 曲線 $y=x^3-3x^2-8x+a$ 的兩條斜率為 1 之切線間的距離為_____。

9. 如右圖，拋物線 $y=4-x^2$ 交 x 軸於 A 、 B 兩點， $\overline{AB}$ 固定， $\overline{CD}$ 移動時，
內接梯形 $ABCD$ 的最大面積為_____。



10. 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ，在 $x=-6$ 處有極大值 149，在 $x=\frac{2}{3}$ 處有極小值，
求序組 $(a,b,c)=$ _____。

三、計算證明題(每題 8 分，共 16 分)

1. 已知甲生每日上學遲到的機率為 x ，準時的機率為 $1-x$ ，每日遲到與否互相獨立，其中 $0 < x < 1$ 。連續三個上學日中，只有一天遲到的機率為 $f(x)$ ，試問：

(1) $f(x) =$ _____。

(2) 當機率 x 為多少時 $f(x)$ 有最大值？ $f(x)$ 最大值為多少？

2. 試證：若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

武陵高中 114 學年度第一學期高三數學乙第二次期中考答案卷

範圍：選修數學乙(上)第二章

班級：

座號：

姓名：

一、多選題(每題 8 分，共 24 分，錯 1 個選項 5 分、錯 2 個選項 2 分，錯 3 個選項以上 0 分)

1	2	3

二、填充題(每小題 5 分，共 60 分)

1(1)	1(2)	2(1)	2(2)
3	4	5	6
7	8	9	10

四、計算證明題(每題 8 分，共 16 分)

1. 已知甲生每日上學遲到的機率為 x，準時的機率為 $1-x$，每日遲到與否互相獨立，其中 $0 < x < 1$。連續三個上學日中，只有一天遲到的機率為 $f(x)$，試問： (1) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$。(2 分) (2) 當機率 x 為多少時 $f(x)$ 有最大值? (3 分) $f(x)$ 最大值為多少? (3 分)	2. 試證：若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。
--	--

武陵高中 114 學年度第一學期高三數學乙第二次段考答案卷

範圍：選修數學乙(上)第二章

班級：

座號：

姓名：

一、多選題(每題 8 分，共 24 分，錯 1 個選項 5 分、錯 2 個選項 2 分，錯 3 個選項以上 0 分)

1	2	3
ABD	ABD	ABCE

二、填充題(每小題 5 分，共 60 分)

1(1)	1(2)	2(1)	2(2)
2	4	$P(x) = -0.2x^2 + 50x - 40$	26
3	4	5	6
$x - 4y - 1 = 0$	(3,2)	$a \geq 3$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
7	8	9	10
$x^3 - 2x^2 + 3$	$16\sqrt{2}$	$\frac{256}{27}$	(8, -12, 5)

三、計算證明題(每題 8 分，共 16 分)

1. 已知甲生每日上學遲到的機率為 x，準時的機率為 $1-x$，每日遲到與否互相獨立，其中 $0 < x < 1$。連續三個上學日中，只有一天遲到的機率為 $f(x)$，試問： (1) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$。(2 分) (2) 當機率 x 為多少時 $f(x)$ 有最大值? (3 分) $f(x)$ 最大值為多少? (3 分) (1) $f(x) = C_1^3 \times x(1-x)^2 = 3x^3 - 6x^2 + 3x$ (2) $f'(x) = 9x^2 - 12x + 3 = 3(3x-1)(x-1)$ $x = \frac{1}{3}$ 時，有極大值 $f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^3 - 6(\frac{1}{3})^2 + 3(\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$。	2. 試證：若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。 $\because f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分 $\therefore f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在 故 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right]$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a)$ $= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$ 得證 因此，$f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。
--	---