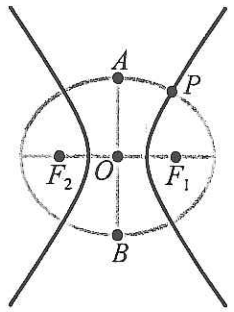
(202, 204-215)

桃園市立武陵高中106學年度第二學期二年級數學科自然組期末考試題卷

範圍：反矩陣~二次曲線　班級：_____　座號：______　姓名：____________

甲、多選題(16%，每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答者得 0 分)



1. 右圖中，橢圓$\Gamma_1:\frac{x^2}{q}+\frac{y^2}{r}=1$與雙曲線$\Gamma_2:\frac{x^2}{s}+\frac{y^2}{t}=1$有共同的焦點$F_1$，$F_2$，橢圓的中心為$O$，$A$，$B$是橢圓的二個頂點，且$\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=10$，$\overline{F_1F_2}=8$．

若P是橢圓與雙曲線的交點，且$\overline{PF_1}=4$．選出正確的選項：

(A)$\overline{BF_1}=5$

(B)$q+r=8$

(C)$s+t=16$

(D)橢圓的正焦弦長為$\frac{18}{5}$

(E)雙曲線的正焦弦長為 15

2. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & -\cos 20^\circ\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}\cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}-\cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

則下列哪些選項是正確的?

(A) $B^{-1}=C$　(B) $AD=DA$　(C) $B^2C^4=C^2$　(D) $ABCD=I$　(E) $D^{18}=I$.

乙、填充題(66%　，配分如下表)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	31	38	44	50	56	61	66

1. 已知$A(-1,2)$，$B(4,1)$，$C(6,3)$為的$\triangle ABC$三個頂點，及二階方陣$M=\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & -2\end{bmatrix}$。若經過$M$作線性變換後對應為$\triangle A'B'C'$，求$\triangle A'B'C'$的面積______。

2. 設$\triangle AOB$中，O為原點，$A(4,-1)$，B在第一象限內，且$\angle AOB=\theta$，若$\tan\theta=\frac{4}{3}$，且$\overline{OB}=5\overline{OA}$，則$B$的坐標為______。

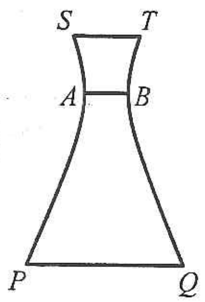
3. 雙曲線Γ的兩漸近線為$x-3y+5=0$與$x+3y-1=0$且有一頂點為（4，1），則Γ的焦點坐標為______。

4. 已知拋物線 Γ：$x^2=4y$及坐標平面上一點A（3，5），其中F為Γ之焦點。若P為Γ上任意點，試求：$\triangle AFP$　周長之最小值______。

背面有題

5. 已知c為實數且拋物線 $y^2-4cx+4cy+4c^2+16c=0$之準線為$x=6$，試求拋物線焦點坐標______。

6. 右圖是某冷卻塔的截面圖，其頸部AB剛好是雙曲線的貫軸．已知$\overline{AB}$，$\overline{ST}$與$\overline{PQ}$互相平行，$\overline{AB}=8$，$\overline{ST}=12$，$\overline{PQ}=40$，且$\overline{AB}$與$\overline{ST}$相距5，求$\overline{AB}$與$\overline{PQ}$的距離______。

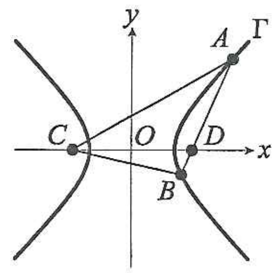


7. 將橢圓 Γ: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 圖形上的每一點以原點為中心，沿著x軸方向伸縮 2 倍，沿著y軸方向伸縮 4 倍，得一新橢圓 Γ'。試求橢圓 Γ' 上一點 A 到橢圓Γ' 上兩焦點F_1，F_2 所形成$\triangle AF_1F_2$ 的周長______。

8. 設F_1，F_2為雙曲線$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$的兩焦點，$P$為雙曲線上一點．若$\triangle PF_1F_2$為一直角三角形，則此直角三角形其面積可能為何?______。

9. 已知點$A(4,0)$，$\Gamma:\sqrt{\left(x+\sqrt{7}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-\sqrt{7}\right)^2+y^2}=10$，$P(x,y)$為$\Gamma$上任意點，試問$\overline{AP}$長恰為整數的點$P$有幾個?______。

10. 雙曲線$\Gamma:x^2-y^2=1$的焦點為C，D。A，B兩點位於Γ上，且$\overline{AB}$通過Γ的焦點D。已知$\overline{AB}=4$，$\angle ACB=60^\circ$，則$\overline{AC}\times\overline{BC}$
=______。



丙、計算證明題(2大題，共18分)

1. 已知直線$L:5x-10y-3=0$，現先將直線L對直線$y=2x$鏡射後，再沿x軸方向推移y坐標的2倍所得之直線為L'。
   (1)若二階方陣T所代表的線性變換為將直線L變換成直線L'，求出方陣T。 **(5分)**
   (2)求出直線L'之方程式。 **(5分)**

2. 橢圓$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$且其中一焦點$F(c，0)$，若$P(x,y)$為$\Gamma$上任意點，且$a,b,c$皆為正數，試證：$\overline{PF}=a-\frac{c}{a}x$ **(8分)**

背面有題

桃園市立武陵高中 106 學年度第二學期二年級數學科自然組期末考答案卷

範圍：反矩陣~二次曲線　班級：_____　座號：______　姓名：________________

甲、多選題(16%，每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答者得 0 分)

1. AD	2. ACE

乙、填充題【共 10 格，共 66 分】

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	31	38	44	50	56	61	66

1. 48	2. $(16,13)$	3. $(-2\pm2\sqrt{10},1)$	4. 11
5. $(2,4)$	6. $4\sqrt{30}$	7. $8+4\sqrt{2}$	8. $\frac{15}{2}$, 5
9. 16	10. 16		

丙、計算證明題【2 大題，共 18 分】

1.

(1) $T=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

............(1 分　3 分　1 分　)

(2) $\because\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ .... (1 分)

$\therefore\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}&2\\\frac{4}{5}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}x'+2y'\\\frac{4}{5}x'-y'\end{bmatrix}$ .....

(2 分)

故 $L':11x-20y+3=0$ .... (2 分)

2. $\overline{PF_1}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$=\sqrt{(x-c)^2+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}$

$\left(\because\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \therefore y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)$

$=\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2-2cx+\left(c^2+b^2\right)}$

$=\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2\right)}$

$(\because\ a^2=b^2+c^2)$

$=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2}$

$=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$ .... (5 分)

$=a-\frac{c}{a}x$ ($\because\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\therefore$

$-a\le x\le a$，$-c\le\frac{c}{a}x\le c$，

$a-\frac{c}{a}x>0$) .... (3 分)