

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

注意：以下試題中  $A^{-1}$  均代表方陣  $A$  之乘法反方陣， $I_n$  表示  $n$  階單位方陣，試題共一張，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題需計算至最簡，答案全對始計分

一、填充題【共 10 格，每格 6 分，共 60 分】

1、設矩陣  $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$ ，且  $a_{ij} = 2i + j^2 - 5$ ，試求矩陣  $A$  中所有元之和 = \_\_\_\_\_

1、若方程組  $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x + ky - z = y \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$  有異於  $(0,0,0)$  的解， $k \in R$ ，試求  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy - yz - zx}$  之值  
= \_\_\_\_\_

3、有一個方程組的增廣矩陣為  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & a & 19 \\ 2 & b & -2 & -14 \\ 1 & 1 & 5 & c \end{bmatrix}$ ，將此矩陣進行列運算後可得矩陣

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，試求  $a + b + c =$  \_\_\_\_\_

4、若  $r \in R$ ，且  $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $(I + A)^6 = I + rA$ ，試求  $r =$  \_\_\_\_\_

5、設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ，則  $c =$  \_\_\_\_\_

6、森森和女友的情話綿綿專線電話號碼： $0, 9, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ ，若將號碼未知的部份排成矩陣  $X = [a_{ij}]_{2 \times 4}$ ，為了避免被其他人竊取號碼，將矩

陣  $X$  的左邊乘上  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ，右邊乘上  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，得到矩陣

$Y = \begin{bmatrix} -5 & -32 & 3 & 32 \\ -5 & -46 & 15 & 64 \end{bmatrix}$ ，亦即  $AXB = Y$ ，試求  $a_{13} - a_{24} =$  \_\_\_\_\_

7、森森玩抽球遊戲：有一個不透明箱子內一開始裝有 2 個黑球，每一次森森從箱子中任取一球，取出不放回，取完球後再擲一骰子，若出現 3 的倍數的點數，則另取一個白球放入箱子內，否則另取一個黑球放入箱子內，使箱子內仍保持 2 個球。接著再做下一次抽取。試求森森抽球趨近無限多次後，箱子內有 2 個黑球的機率  
=\_\_\_\_\_

8、二階矩陣  $A$  與  $B$  滿足  $A+B=O$ ， $AB=I$ ，其中  $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若  $(A^5-B^5)^{-1}=kA$ ，  
試求實數  $k$  之值=\_\_\_\_\_

9、若  $A=\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ 、 $P=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  及  $B$  均為二階方陣矩陣， $P^{-1}BP=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

(1) 試求  $P^{-1}AP=$ \_\_\_\_\_

(2) 已知  $(A+B)^n=\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，試求  $a_n-b_n-c_n+d_n=$ \_\_\_\_\_

## 二、計算證明題【2大題，共20分，第一大題6分，第二大題14分】

1、試證明：若二階方陣  $A$  有乘法反矩陣，則  $A$  的反矩陣只有一個

2、試就  $a$  值討論方程組 
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
 的解，並說明其幾何意義（若有解需將解寫出來）

## 三、多重選擇題【每題10分，答錯1選項得6分，錯2選項得2分，錯3選項(含)以上得0分，不答不給分，共20分】

1、有  $n$  個袋子，每個袋子內各放2個紅球，5個黑球，今由每個袋子中各取出一球，設  $p_n$  表示由  $n$  個袋子中取出的紅球總數為奇數的機率， $q_n$  表示由  $n$  個袋子中取出的紅

球總數為偶數的機率。令  $X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$ ，且矩陣  $A$  滿足  $X_n = AX_{n-1}$  ( $n \geq 2, n \in N$ )，試問

下列何者為真？ (A)  $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$  (B)  $X_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 49 \\ 39 \\ 49 \end{bmatrix}$  (C)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \\ 2 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

(D)  $p_n = \frac{3}{7}p_{n-1} + \frac{5}{7}$  (E)  $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\right)^n$

2、設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為三個矩陣， $I_n$  為  $n$  階單位方陣，且下列運算均有意義，試問下列何

者正確？ (A) 若  $A$  為  $m \times n$  階矩陣且  $AB = A$ ，則  $B = I_n$  (B) 若  $AB = AC$ ，則  $B = C$

(C) 若  $AB = I_n$ ，則  $BA = I_n$  (D)  $(AB)C = A(BC)$

(E) 若  $A$ 、 $B$  均為可逆，則  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、填充題【共 10 格，每格 6 分，需全對才給分，共 60 分】

1	2	3	4	5
4450	$\frac{-11}{5}$	13	1365	5950
6	7	8	9(1)	9(2)
7	$\frac{4}{9}$	$\frac{-1}{2}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$2 \times 3^n$

二、計算證明題，第一題 6 分，第二題 14 分，共 20 分（沒有過程不計分）

1、設  $B$ 、 $C$  皆為  $A$  之反方陣

則  $AB = BA = I_2$  且  $AC = CA = I_2$ ，所以  $B = BI_2 = B(AC) = (BA)C = I_2C = C$

故  $A$  的反方陣只有一個

2、 $\Delta = (a+2)(a-1)^2$ ， $\Delta_x = (a-1)^2$ ， $\Delta_y = (a-1)^2$ ， $\Delta_z = (a-1)^2$  (2 分，錯 1 個扣 1 分)

(1)  $a \neq 1, -2$  時，恰有一解  $(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})$ ，表三平面交於一點 (4 分，沒寫解扣 2 分)

(2)  $a = 1$  時，無限多解，解為  $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 - t - s \end{cases}$   $t, s \in R$ ，表三平面重合 (4 分，沒寫解扣 2 分)

(3)  $a = -2$  時，無解，表三平面兩兩交於一線且三線平行 (4 分)

(1)(2)(3) 中，寫錯幾何意義各扣 2 分

三、多重選擇題【每題 10 分，答錯 1 選項得 6 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項(含)以上得 0 分，不答不給分，共 20 分】

1	AC	2	D
---	----	---	---