

桃園市立武陵高級中學 114 學年度第一學期高二數學 A 期末評量

範圍：龍騰版單元 8~單元 10

一、多重選擇題(每題 9 分，每題每選項錯一個扣 3 分，9 分扣完為止，占 27 分)

1、(145) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 皆為平面上非零向量，則下列哪些選項正確？

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ 。

(2) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ 。

(3) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 兩向量夾角為 θ ，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上正射影為 $(\cos \theta) \vec{a}$ 。

(4) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 兩向量夾角為 θ ，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上正射影長度為 $|\cos \theta| |\vec{a}|$ 。

(5) 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則 $\vec{c} = \left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} + \left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ 。

2、(234) 坐標平面上，已知 $O(0,0)$ 、 $A(a, a-2)$ 、 $B(a, a+3)$ ， $a \neq 0$ ，且 C 為任意點， m, n 為實數，則下列哪些選項正確？

(1) $\vec{OA}$ 平行 $\vec{OB}$ 。

(2) 若 $\vec{0} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ，則 $m = n = 0$ 。

(3) 若 $\vec{OC} = m\vec{OA} + \vec{OB}$ ，則當 $\vec{OC} \cdot (a, a-2) = 0$ 時， $|\vec{OC}|$ 有最小值。

(4) 若 $\vec{OC} = m\vec{OA} + (1-m)\vec{OB}$ ，則所有 C 點所形成圖形方程式為 $x = a$ 。

(5) 若 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ，其中 $0 \leq m \leq 2$ ， $1 \leq n \leq 4$ ，則所有 C 點所形成區域面積 $= 15|a|$ 。

3、(12) 已知 a, b, c, d 為實數，且使聯立方程式 $\begin{cases} 2x - ay = 2 \\ 6x + 3y = b \end{cases}$ 有解，以及聯立方程式

$\begin{cases} -x + 4y = d \\ 2x + cy = 4 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項有可能成立？

(1) $a = -1$ 。 (2) $b = 5$ 。 (3) $c = 8$ 。 (4) $d = -2$ 。 (5) 聯立方程式組 $\begin{cases} 6x + 3y = b \\ 2x + cy = 3 \end{cases}$ 無解。

二、選填題(共 11 格，每格 5 分，占 55 分)

A. $\begin{vmatrix} 597 & 786 \\ 45 & 47 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 549 & 738 \\ 45 & 47 \end{vmatrix} = \underline{\textcircled{4} \textcircled{5}} \circ 96$

B. 已知 $\vec{a} = (7, -4)$ 及直線 $L: 2x - 3y = 12$ ，則 $\vec{a}$ 在 L 的法向量上的正射影為

$\underline{(\textcircled{6}, \textcircled{7} \textcircled{8})} \circ 4, -6$

C. 已知平面上 $\triangle PBC$ 及一點 A ，設 $\vec{PA} = \frac{5}{3}\vec{PB} + \frac{2}{3}\vec{PC}$ ，且 $\overline{PA}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 D ，則 $\overline{PD} : \overline{PA} =$

$\underline{\textcircled{9} : \textcircled{10}} \circ 3:7$

D. t 為實數， $\vec{a} = (t-10, 3)$ 、 $\vec{b} = (8, t)$ ，若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，則 $t = \underline{\textcircled{11} \textcircled{12}} \circ 12$

E. 平面上四邊形 $ABCD$ ， $A(0, 0)$ 、 $B(21, 0)$ 、 $C(14, 24)$ 、 $D(-5, 12)$ ，則 $\angle DAB$ 的角平分線與

$\angle ABC$ 的角平分線交點座標為 $\underline{(\textcircled{13}, \frac{\textcircled{14}\textcircled{15}}{\textcircled{16}})} \circ 7, 21/2$

F. α 為實數，

$$\left| \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) & \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 2\cos(2\alpha + \frac{2\pi}{3}) & 2\sin(2\alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} \cos(3\alpha) & \sin(3\alpha) \\ 3\cos(3\alpha + \pi) & 3\sin(3\alpha + \pi) \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{\textcircled{17}\sqrt{\textcircled{18}}}{\textcircled{19}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

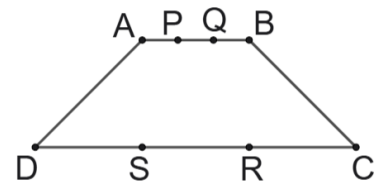
G、坐標平面上，已知 $A(3,4)$ 、 $B(x,0)$ 、 $C(0,y)$ ，且 $\overline{BC}=10$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最大值為

$\textcircled{20} \textcircled{21}$ ，此時 $(x,y) = (\textcircled{22} \textcircled{23}, \textcircled{24} \textcircled{25})$ 。75 (-6,-8)

H. 如(圖一)，已知平面上梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ 、 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{CD}=9$ 。若 P 、

Q 在 $\overline{AB}$ 上，滿足 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$ ；而 R 、 S 在 $\overline{CD}$ 上，滿足

$\overline{CR} = \overline{RS} = \overline{SD}$ ，則 $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{RQ} = \textcircled{26}$ 。8

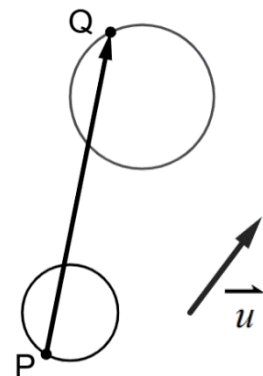


(圖一)

I. 如(圖二)，已知圓 C 方程式為 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 、圓 D 方程

式為 $(x-4)^2 + (y-11)^2 = 9$ ，動點 P 、 Q 分別在圓 C 、圓 D

上，向量 $\vec{u} = (3,4)$ ，則 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}$ 的最大值為 $\textcircled{27} \textcircled{28}$ 。70



(圖二)

J. k 為實數，已知聯立方程式 $\begin{cases} (k+1)x+8y=k-1 \\ 14x-ky=-2 \end{cases}$ 恰有一組實數解 $x=x_0$ 、 $y=y_0$ ，且

$x_0 + y_0 = 1$ ，則 $k = \textcircled{29} \textcircled{30}$ 。10

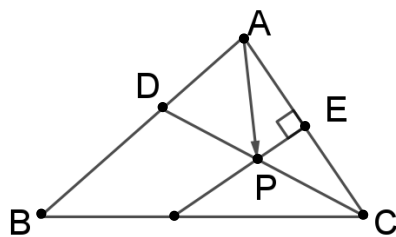
三、計算與證明題(兩大題，占 18 分)

1、如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{AC}=4$ 、 $\overline{BC}=6$ ， $\angle BCA$ 的角平分線與 $\overline{AB}$ 的交點為 D ， E 為 $\overline{AC}$ 中點，且 $\overline{AC}$ 的中垂線交 $\overline{CD}$ 於 P ，求

(1) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$ (3 分)

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (3 分)

(3) 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (x, y) 。(4 分)



解：(1) 8

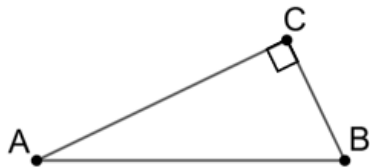
(2) $\frac{5}{2}$

(3) $8 = \frac{5}{2}x + 16y$ 、 $1 = \frac{5}{2}x + y$

$x = \frac{16}{75}$ ， $y = \frac{7}{15}$

2、請利用向量且過程中不以坐標化的方式證明以下式子

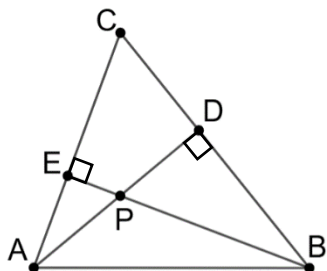
(1) 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ，證明： $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 。(4 分)



參考證明： $\because \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB} \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \overline{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + 0 + \overline{BC}^2\end{aligned}$$

(2) 如圖，在銳角 $\triangle ABC$ 中，已知 D 為 A 對 $\overline{BC}$ 所做的垂足、 E 為 B 對 $\overline{AC}$ 所做的垂足，若 P 為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 的交點，證明： $\overrightarrow{CP} \perp \overline{AB}$ 。(4 分)



參考證明：已知 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overline{AB} &= \overrightarrow{CP} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= -\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \text{故 } \overrightarrow{CP} \perp \overline{AB}\end{aligned}$$