

桃園市立武陵高級中學 113 學年度第二學期期末考高二數學 A 試題卷

一.多選題(共 24 分，每題全對得 8 分，錯一個選項得 6 分，錯二個選項得 3 分)

1.設 A 與 B 都是二階方陣， I_2 為二階單位方陣，若二階方陣 X 滿足 $AX = B$ ，請選出正確的選項。

- (1)若 $A=B$ ，則 $X = I_2$ (2)若 $B = I_2$ ，則 $X = A^{-1}$ (3)若 $A = 2B$ ，則 $\det X = \frac{1}{4}$
 (4)若 $A^2 = I_2$ ，則 $X = A^{-1}B$ (5)若 $B = I_2$ ，則 $\det A = \frac{1}{\det X}$ 。

2.假設二階方陣 $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換，將與原點 O 距離為 1 的點 $C(x, y)$ 映射到點

$C'(x', y')$ ，其中 a, b 為滿足 $a^2 + b^2 \neq 0$ 的實數。試選出正確的選項。

- (1)若 $a = 2, b = 1$ ，則線段 $\overline{OC'}$ 的長為定值 (2)若 $a + b = 2$ ，則線段 $\overline{OC'}$ 長的最小值為 2
 (3) $\angle CC'O$ 有可能為 60° (4) C 與 C' 有可能對稱於 x 軸
 (5)若 O, C, C' 三點不共線，則 $\triangle OCC'$ 的面積為 $\frac{|b|}{4}$ 平方單位。

3.設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) A 為一鏡射矩陣 (2) AB 為一旋轉矩陣 (3) $AB = BA$ (4)設 $k > 0$ ，則 $(AB)^{2025} \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k \end{bmatrix}$
 (5)設 $\triangle PQR$ 經矩陣 $(BA)^{2025}$ 變換到 $\triangle P'Q'R'$ ，則 $\triangle P'Q'R'$ 的面積會大於 $\triangle PQR$ 的面積。

二.填充題(共 66 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	58	62	66

1.已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。試求 $A(B+C) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2.設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，則 A 的乘法反方陣 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，試求 $A \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ 6 & -21 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4.設 A, B, C 三點坐標為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 4，
 若點 $P(x_1 - 2y_1, 3x_1 - 4y_1), Q(x_2 - 2y_2, 3x_2 - 4y_2), R(x_3 - 2y_3, 3x_3 - 4y_3)$ ，則 $\triangle PQR$ 的面積為_____。

5.已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求滿足 $AX = X + A$ 的矩陣 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 設 $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ 滿足 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = kA$ ，求實數 $k =$ _____。

7. 若方程組 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的 (x, y, z) 無解，則 $a =$ _____。

8. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=4 \end{cases}$ 恰有一解 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ，則 $a+b+c+d =$ _____。

9. xy 平面上，若 $\triangle ABC$ 的面積為 $10\sqrt{3}$ ， $A(1,1)$ ， $B(5,3)$ ， $C(a,b)$ 在第四象限， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ，則 $2a+b =$ _____。

10. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$ ，其中 $a, b, c \in R$ ，若 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ，且矩陣 B 所表示的線性變換把直線 $x-2y=3$ 映射到直線 $x-3y=-15$ ，則序組 $(a, b, c) =$ _____。

11. 已知轉移矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & a_1 \\ a_2 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ； B 為以原點 O 為中心，逆時針旋轉一銳角的旋轉矩陣，且

$B^8 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ ； C 為鏡射矩陣，且 $C^5 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & c_1 \\ 4 & c_2 \end{bmatrix}$ 。若矩陣 $P = A^{10}BC \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 P 中所

有元的和為_____。

三. 計算證明題(共 10 分，每小題皆需要有詳細的計算或證明過程)

設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，試回答下列各問題：

(1) 試證明： $A^2 - (a_1 + a_4)A + (a_1a_4 - a_2a_3)I_2 = O_2$ 。(3 分)

(2) 承(1)，若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，試求 $A^5 - 7A^4 + 11A^3 - 18A^2 + 31A + 13I_2 =$ _____。(3 分)

(3) 若 $a_1 + a_4 \neq 0$ ， $b_1 + b_4 \neq 0$ ，且 $A^2 = B^2$ ，試證明： $AB = BA$ 。[可利用(1)的結論證明之](4 分)

桃園市立武陵高級中學 113 學年度第二學期期末考高二數學 A 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一.多選題(共 24 分，每題全對得 8 分，錯一個選項得 6 分，錯二個選項得 3 分)

1.	2.	3.

二.填充題(共 66 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	58	62	66

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.	11.	

三.計算證明題(共 10 分，每小題皆需要有詳細的計算或證明過程)

(1)(3 分)
(2)(3 分)
(3)(4 分)

桃園市立武陵高級中學 113 學年度第二學期期末考高二數學 A 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一.多選題(共 24 分，每題全對得 8 分，錯一個選項得 6 分，錯二個選項得 3 分)

1.	2.	3.
(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(4)

二.填充題(共 66 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	58	62	66

1.	2.	3.	4.
$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$	8
5.	6.	7.	8.
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	121	-3	$\frac{2}{5}$
9.	10.	11.	
13	$(-2, 1, -3)$	$4\sqrt{2}$	

三.計算證明題(共 10 分，每小題皆需要有詳細的計算或證明過程)

$A^2 - (a_1 + a_4)A + (a_1a_4 - a_2a_3)I_2$ (1)(3 分) $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2a_3 & a_1a_2 + a_2a_4 \\ a_1a_3 + a_3a_4 & a_2a_3 + a_4^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a_1 + a_4)a_1 & (a_1 + a_4)a_2 \\ (a_1 + a_4)a_3 & (a_1 + a_4)a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1a_4 - a_2a_3 & 0 \\ 0 & a_1a_4 - a_2a_3 \end{bmatrix}$ $= O_2$ (3 分)
(2)(3 分) 由(1)$\Rightarrow A^2 - 5A - 2I_2 = O_2$ (1 分) 所以 $A^5 - 7A^4 + 11A^3 - 18A^2 + 31A + 13I_2$ $= (A^3 - 2A^2 + 3A - 7I_2)(A^2 - 5A - 2I_2) + (2A - I_2)$ $= 2A - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (2 分)$
(3)(4 分) $A^2 - (a_1 + a_4)A + (a_1a_4 - a_2a_3)I_2 = O_2$ 且 $B^2 - (b_1 + b_4)B + (b_1b_4 - b_2b_3)I_2 = O_2$ (1 分) 因為 $A^2 = B^2$，所以 $-(a_1 + a_4)A + (a_1a_4 - a_2a_3)I_2 = -(b_1 + b_4)B + (b_1b_4 - b_2b_3)I_2$ $\Rightarrow A = \frac{(b_1 + b_4)}{(a_1 + a_4)}B + \frac{(b_1b_4 - b_2b_3 - a_1a_4 + a_2a_3)}{-(a_1 + a_4)}I_2 \quad (1 分)$ 故 $AB = BA$ (2 分)