武 陵 高 中 111 學 年 度 第 一 學 期 高 三 選 修 數 學 甲 第 一 次 期 中 考 試 題 卷

範圍：選修數學甲(下)　第一章　極限　　班級：　　　座號：　　　姓名：

一、多重選擇題(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項或未作答不得分)

1. 實數數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle,\langle d_n\rangle$各項皆不為零，已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，$\langle c_n\rangle$收斂，$\langle d_n\rangle$發散，試選出敘述正確的選項。

   (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$不存在

   (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{b_n}$不存在

   (C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d_n}{c_n}$不存在

   (D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{d_n}$不存在

   (E) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n\cdot d_n)=0$

2. 下列無窮級數何者收斂？([ ]為高斯符號)

   (A) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$

   (B) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

   (C) $0.\bar{9}+(0.\bar{9})^2+(0.\bar{9})^3+\cdots+(0.\bar{9})^n+\cdots$

   (D) $1-1+2-2+3-3+4-4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+\cdots$

   (E) $1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\left[\dfrac{n+1}{2}\right]}+\cdots$

3. 函數 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 、 $g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定義域皆為正實數，函數$h(x)=|x|$的定義域為實數，試選出敘述正確的選項。

   (A) $f(x)$的值域為$\{y\in R\mid y\geq 2\}$

   (B) $(f-g)(x)$為一對一函數

   (C) $(\dfrac{f}{g})(x)$的定義域為$\{x\in R\mid x\neq 1\}$

   (D) $(f\circ h)(x)$的定義域為$\{x\in R\mid x\neq 0\}$

   (E) $(f\circ h)(x)$在其定義域內為偶函數

二、填充題　(每格 6 分，共 60 分)　**參考數值：** $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

1. 試求下列各值：(若其值不存在則寫不存在，題中的[ ]皆為高斯符號)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=$ ________ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-\left[x^3\right]}{x^2-\left[x^2\right]}=$ ________ 。

(3) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{4}\right]+\cdots+\left[\sqrt{120}\right]=$ ________ 。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})^2+\cdots+(1+\frac{1}{n})^{n-1}}{n}=$ ________ 。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1+\sin\frac{\pi}{12}\right]+\left[2+\sin\frac{2\pi}{12}\right]+\left[3+\sin\frac{3\pi}{12}\right]+\cdots+\left[n+\sin\frac{n\pi}{12}\right]}{n^2}=$ ________ 。

2. (1) 函數 $f(x)=1+\sqrt{x^2-1}$ 且定義域為 $\{x\in R \mid x\le -1\}$，求 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)=$________。

(2) 承上， $f^{-1}(x)$ 的定義域為________。

3. 設 a 為實數，若函數 $f(x)=\begin{cases} ax & ,x\ge -2 \\ \dfrac{|x^2-4|-|x+2|}{x+2} & ,x<-2 \end{cases}$ 為連續函數，求 a 之值為________。

4. 已知方程式 $\log_2 x-\dfrac{x}{10}=0$ 有兩正實根 α,β ，已知 $1<\alpha<2$ ， $2^n<\beta<2^{n+1}$ ，其中 n 為正整數，求 n 之值為________。

5. 小武參加某個限定商品的抽獎，已知抽獎方式如下：第一次抽要付 100 元，每次抽中獎品的機率為 $\dfrac{1}{6}$ ，若抽中則可拿到限定商品，若沒抽中可以選擇就此放棄抽獎機會，或是比上次多付 100 元的金額再抽一次。例如：第一次花費 100 元沒抽中，可再花費 200 元抽第二次，若第二次沒中則可再花費 300 元抽第三次，依此類推。假設小武身上有無限的資金且絕不放棄，會持續抽獎直到抽中限定商品為止，則小武所花費金額的期望值為________元。

三、混合題　(共 16 分，未完整作答不予給分)

1. 義大利人<u>費波那契</u>研究一數列$\langle F_n \rangle$(稱之為費式數列)，給定$F_1 = F_2 = 1$，其後的每一項為前兩項之和，以遞迴關係式表達即為$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in N \end{cases}$。例如：$F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$，$F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 = 3$。

若用費式數列相鄰兩項的比做一個新的數列，即$\langle r_n \rangle = \left\langle \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \right\rangle$，例如：$r_1 = \dfrac{F_2}{F_1} = 1, r_2 = \dfrac{F_3}{F_2} = 2, r_3 = \dfrac{F_4}{F_3} = \dfrac{3}{2}$。

(1)下列選項何者敘述正確？ (3 分，為多選題，每錯 1 個選項扣 1 分直到扣到 0 分為止，不須過程)

(A) $F_5 = 5$　(B) $F_5 = r_4 \times r_3 \times r_2 \times r_1$　(C) $\langle F_n \rangle$發散　(D) $r_3 < r_4 < r_5$　(E) $F_n < 2^n$

(2)利用$r_{n+1} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$及$r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$，將$\langle r_n \rangle$以遞迴關係式表示。 (3 分，將$r_{n+1}$用$r_n$表示)

(3)利用(2)的結果，用數學歸納法證明：$1 \le r_n \le 2$，對任意的正整數 n 恆成立。 (7 分)

(4)若我們已經得知$\langle r_n \rangle$收斂且$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$，試利用(2)與(3)的結果，求$\alpha$之值 (3 分)

(提示：$\lim\limits_{n\to\infty} r_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$，且由(3)的結果得知$\alpha \neq 0$)

武陵高中 111 學年度第一學期高三選修數學甲第一次期中考答案卷

範圍：選修數學甲(下)　第一章　極限　　班級：　　　座號：　　　姓名：

一、多重選擇題　(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項或未作答不得分)

1.	2.	3.

二、填充題　(每格 6 分，共 60 分)

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)	1.(5)
2.(1)	2.(2)	3.	4.	5.

三、混合題　(共 16 分，未完整作答不予給分)

(1)		(2)	
(3)			
(4)			

武陵高中 111 學年度第一學期高三選修數學甲第一次期中考答案卷

範圍：選修數學甲(下)　第一章　極限　　班級：　　座號：　　姓名：

一、多重選擇題　(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項或未作答不得分)

1.	2.	3.
AC	AE	ABDE

二、填充題　(每格 6 分，共 60 分)

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)	1.(5)
1	不存在	825	e-1 (1.718 亦給分)	$\frac{1}{2}$
2.(1)	2.(2)	3.	4.	5.
$-\sqrt{x^2-2x+2}$	$\{x\in R \mid x\geq 1\}$	$\frac{3}{2}$	5	3600

三、混合題　(共 16 分，未完整作答不予給分)

(1)	ABCE (錯 1 個扣 1 分 扣到 0 分為止)	(2)	$r_{n+1}=\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}=\frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}}=1+\frac{F_n}{F_{n+1}}\Rightarrow r_{n+1}=1+\frac{1}{r_n}$ (3 分)
(3)	當 $n=1$ 時，$r_1=1\Rightarrow 1\leq r_1\leq 2$，原式成立。 (1 分) 設 $n=k(k\in N)$ 時原式成立，即 $1\leq r_k\leq 2$。 (1 分) 則 $n=k+1$ 時，$r_{k+1}=1+\frac{1}{r_k}$， (1 分) 其中 $1\leq r_k\leq 2\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{r_k}\leq 1$ (1 分) $\Rightarrow\frac{3}{2}\leq 1+\frac{1}{r_k}\leq 2$ (1 分) $\Rightarrow 1\leq\frac{3}{2}\leq r_{k+1}\leq 2$，原式亦成立。 (1 分) 故由數學歸納法得證。 (1 分)		
(4)	$r_{n+1}=1+\frac{1}{r_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}r_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{r_n})\Rightarrow\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ (1 分) $\Rightarrow\alpha^2-\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (1 分) 由 $1\leq r_n\leq 2\Rightarrow 1\leq\alpha\leq 2$，得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 不合，故 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (1 分)		