

武陵高中 114 學年度第二學期高三選修數學甲(下)期末考試題卷

範圍：翰林版選修數學甲(下) 第一章、3-1 班級： 座號： 姓名：

一、多重選擇題(每題 10 分，每個選項判斷正確得 2 分)

1. (①)坐標平面上有一直線 L 及兩相異點 $A(c,0)$ 、 $B(-c,0)$ ，下列哪些敘述是正確的？
- (1) 坐標平面上，滿足 P 到 L 的距離 $d(P,L) = \overline{PA}$ 的所有點 P 所形成的圖形為拋物線。
 - (2) 坐標平面上，定值 $2a > \overline{AB}$ ，滿足 $\overline{PA} + \overline{PB} = 2a$ 的所有點 P 所形成的圖形為橢圓。
 - (3) 坐標平面上，定值 $2a < \overline{AB}$ ，滿足 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 2a$ 的所有點 P 所形成的圖形為雙曲線。
 - (4) 若以 A 、 B 為兩焦點的雙曲線與它的共軛雙曲線對稱於 $y = x$ ，則此雙曲線為等軸雙曲線。
 - (5) 圓 C 以 A 為圓心， c 為半徑。坐標平面上所有滿足通過 B 且與圓 C 外切的圓，其圓心 P 所形成的圖形為雙曲線的一支。
2. (②)一袋中有 3 顆球，分別為 1 顆紅球與 2 顆白球，每次從中取出 1 球觀察其顏色，每球被取機會相同，取出後放回，共取 5 次。令隨機變數 X 為 5 次中取中紅球的次數， Y 為 5 次中取中白球的次數，下列哪些敘述是正確的？
- (1) 觀察 X 的值，即觀察 5 次中取中紅球的次數，是一個隨機試驗。
 - (2) 觀察 $X+Y$ 的值，即觀察 5 次中取中紅球次數與取中白球次數的和，是一個隨機試驗。
 - (3) $P(X=1) = P(X=2)$
 - (4) $P(X \geq 4) > 0.05$
 - (5) $E(X) + E(Y) = 5$
3. (③)方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{2t-2} + \frac{y^2}{t-4} = 1$ ， t 為實數， $t \neq 1$ 且 $t \neq 4$ ， Γ 的圖形 不可能 為下列哪些選項？
- (1) 兩焦點在 x 軸上的橢圓
 - (2) 兩焦點在 y 軸上的橢圓
 - (3) 兩焦點在 x 軸上的雙曲線
 - (4) 兩焦點在 y 軸上的雙曲線
 - (5) 圓

注意：要選的是 不可能 的選項

二、填充題 I (每題 8 分，共 40 分)

答案如為分數，請約至最簡分數，如有負號請放置於分子，如未約至最簡分數不予給分。

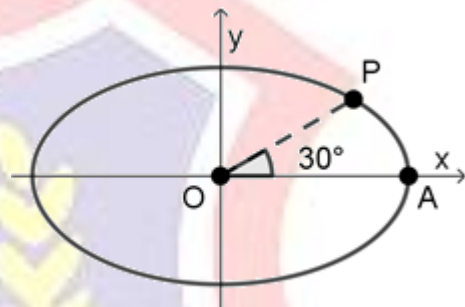
- A. 已知拋物線之頂點為(1, 4)，對稱軸平行 x 軸，且通過(2, 0)，則此拋物線的準線方程式為

$x = \underline{\textcircled{4}} \underline{\textcircled{5}}。$

- B. 已知雙曲線的方程式為 $4x^2 - 9y^2 + 12x + 90y - 180 = 0$ ，實軸長為 $2a$ ，共軛軸長為 $2b$ ，

中心為 (h, k) ，求序對 $(a, b, h, k) = (\underline{\textcircled{6}}, \underline{\textcircled{7}}, \frac{\underline{\textcircled{8}} \underline{\textcircled{9}}}{\underline{\textcircled{10}}}, \underline{\textcircled{11}})$ 。約至最簡分數

- C. 如圖， O 為原點， $A(3, 0)$ 為橢圓在 x 軸上的一個頂點， P 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上於第一象限的一點，且 $\angle AOP = 30^\circ$ 。若 P 的坐標可表示為 $(\frac{a\sqrt{b}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2})$ ，試求 $(a, b, c) = (\underline{\textcircled{12}}, \underline{\textcircled{13}}, \underline{\textcircled{14}})$ 。



- D. 已知 P 點為橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上任意一點，當 P 到 $A(1, 0)$ 的距離有最小值的時候，此時 P 點的 x 坐標為 $\frac{\underline{\textcircled{15}}}{\underline{\textcircled{16}}}$ 。約至最簡分數

- E. 若將圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 以原點為中心，沿水平方向伸縮為 2 倍，沿鉛直方向伸縮為 3 倍，再旋轉 120° ，所得之新圖形 Γ 方程式為 $ax^2 + b\sqrt{3}xy + cy^2 = 144$ ，則序對 $(a, b, c) =$
(①⑦ ①⑧ , ①⑨ ②⑦ ②① , ②② ②③)。

三、填充題 II (每題 3 分，共 9 分)

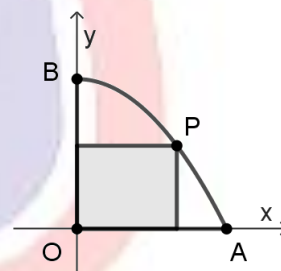
答案如為分數，請約至最簡分數，如有負號請放置於分子，如未約至最簡分數不予給分。

- F. 拋物線 $y = x^2$ 的焦點為 F ， P 為拋物線在第一象限上的一點， M 為 $\overline{PF}$ 的中點， O 為原點。

當 $\overline{OM}$ 的斜率有最小值時，此時 P 點的 x 坐標為 $\frac{\textcircled{24}}{\textcircled{25}}$ 。約至最簡分數

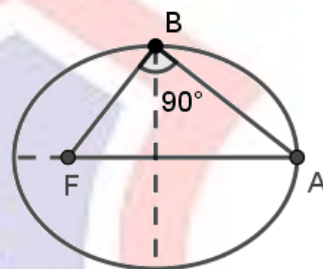
- G. 老王有塊農地形狀如右圖，邊線是由互相垂直的線段 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 及兩端點為 A 、 B 的曲線所圍成。將其座標化後，得到各點坐標分別為 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ ，曲線為 $y = 1 - x^2$ 的部分圖形。老王想在曲線上取一點 P ，圍一塊長方形的地作為農舍使用，如圖所示。若想要使

所圍的面積為最大，試求此時 P 點的 y 坐標為 $\frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}$ 。約至最簡分數



H. 如圖所示， F 為橢圓的一個焦點、 A 為長軸上的一個頂點、 B 為短軸上的一個頂點。已知

$\angle ABF = 90^\circ$ ，且 $\overline{AF}$ 長為 k ，若長軸長可表為 $(a + \sqrt{b})k$ ，試求 $(a, b) = (\underline{28} \underline{29}, \underline{30})$ 。



四、混合題 (共 21 分，未完整作答不予給分)

1. 小異觀察一套一番賞只剩 C 、 D 、 F 、 G 、 G 這 5 個獎項，但沒有最後賞。打算抽中 C 賞與 D 賞後就停手，小異將這個情境轉變為數學問題：一籤筒中有 5 張籤。2 張為有獎籤，3 張為無獎籤。每張籤被取出的機會相同，從筒中每次抽取一籤，取出不放回，直到 2 張有獎籤皆被取出才停止。

(1) 設隨機變數 X 為抽籤的次數(例：有獎、無獎、有獎，此時 $X=3$)，求 X 的機率分布表。(4 分)

(2) 若抽一次的价格是 300 元，設隨機變數 Y 為花費的金額，求 Y 的期望值、變異數、標準差。

(6 分)

2. 設雙曲線 Γ 方程式為 $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ，其中 a 、 b 皆為正數， $P(x_0, y_0)$ 是雙曲線 Γ 上一點：

(1) 雙曲線 Γ 的漸近線 L_1 、 L_2 為下列哪個選項：_____ (單選題，3 分)

(A) $ax - by = 0, ax + by = 0$ (B) $ax - by = 1, ax + by = 1$

(C) $bx - ay = 0, bx + ay = 0$ (D) $bx - ay = 1, bx + ay = 1$

(2) 證明 $P(x_0, y_0)$ 到兩漸近線的距離乘積 $d(P, L_1) \times d(P, L_2)$ 為定值。(以 a 、 b 表示，4 分)

(3) 設雙曲線 $\Gamma: -3x^2 + y^2 = 3$ 的漸近線 L_1 、 L_2 ， $P(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 是雙曲線 Γ 上一點，過 P 作 L_3 、 L_4 分別與 L_1 、 L_2 平行，試求由 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 所圍之平行四邊形面積為_____。(4 分)

武陵高中 114 學年度第二學期高三選修數學甲(下)期末考答案卷

範圍：翰林版選修數學甲(下) 第一章、3-1 班級： 座號： 姓名：

四、混合題 (共 21 分，未完整作答不予給分)

1.	一籤筒中有 5 張籤。2 張為有獎籤，3 張為無獎籤。每張籤被取出的機會相同，從筒中每次抽取一籤，取出不放回，直到 2 張有獎籤皆被取出才停止。
(1)	設隨機變數 X 為抽籤的次數，求 X 的機率分布表。(4 分)
(2)	若抽一次的價格是 300 元，設隨機變數 Y 為花費的金額，求 Y 的期望值、變異數、標準差。
2.	設雙曲線 Γ 方程式為 $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ，其中 a 、 b 皆為正數， $P(x_0, y_0)$ 是雙曲線 Γ 上一點：
(1)	雙曲線 Γ 的漸近線 L_1 、 L_2 為下列哪個選項：_____ (單選題，3 分) (A) $ax - by = 0, ax + by = 0$ (B) $ax - by = 1, ax + by = 1$ (C) $bx - ay = 0, bx + ay = 0$ (D) $bx - ay = 1, bx + ay = 1$
(2)	證明 $P(x_0, y_0)$ 到兩漸近線的距離乘積 $d(P, L_1) \times d(P, L_2)$ 為定值。(以 a 、 b 表示，4 分)
(3)	設雙曲線 $\Gamma: -3x^2 + y^2 = 3$ 的漸近線 L_1 、 L_2 ， $P(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 是雙曲線 Γ 上一點，過 P 作 L_3 、 L_4 分別與 L_1 、 L_2 平行，試求由 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 所圍之平行四邊形面積為_____。(4 分)

1.	2.	3.	A.	B.	C.
245	135	245	-3	2,3,-3/2,5	3,2,6
D.	E.	F.	G.	H.	
4/3	21,-10,31	1/2	2/3	-1,5	

四、混合題 (共 21 分，未完整作答不予給分)

1. 一籤筒中有 5 張籤。2 張為有獎籤，3 張為無獎籤。每張籤被取出的機會相同，從筒中每次抽取一籤，取出不放回，直到 2 張有獎籤皆被取出才停止。											
(1)	設隨機變數 X 為抽籤的次數，求 X 的機率分布表。(4 分)										
	<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0.4</td></tr></table> (各 1 分)	x	2	3	4	5	$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4
x	2	3	4	5							
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4							
(2)	若抽一次的價格是 300 元，設隨機變數 Y 為花費的金額，求 Y 的期望值、變異數、標準差。 $Y = 300X$, $E(X) = 2 \times 0.1 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.4 = 4 \Rightarrow E(Y) = 300E(X) = 1200$ (元) (2 分) $Var(X) = (2-4)^2 \times 0.1 + (3-4)^2 \times 0.2 + (4-4)^2 \times 0.3 + (5-4)^2 \times 0.4 = 1$ $\Rightarrow Var(Y) = 300^2 \times 1 = 90000$ (2 分) $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 1 \Rightarrow \sigma(Y) = 300 \times \sigma(X) = 300$ (元) (2 分)										
2. 設雙曲線 Γ 方程式為 $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ，其中 a 、 b 皆為正數， $P(x_0, y_0)$ 是雙曲線 Γ 上一點：											
(1)	雙曲線 Γ 的漸近線 L_1 、 L_2 為下列哪個選項：____(A)____(單選題，3 分) (A) $ax - by = 0, ax + by = 0$ (B) $ax - by = 1, ax + by = 1$ (C) $bx - ay = 0, bx + ay = 0$ (D) $bx - ay = 1, bx + ay = 1$										
(2)	證明 $P(x_0, y_0)$ 到兩漸近線的距離乘積 $d(P, L_1) \times d(P, L_2)$ 為定值。(以 a 、 b 表示，4 分) $P(x_0, y_0)$ 是雙曲線 Γ 上一點 $\Rightarrow -a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = a^2b^2$ (1 分) $d(P, L_1) = \frac{ ax_0 - by_0 }{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $d(P, L_2) = \frac{ ax_0 + by_0 }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (2 分) $d(P, L_1) \times d(P, L_2) = \frac{ a^2x_0^2 - b^2y_0^2 }{a^2 + b^2} = \frac{ -a^2b^2 }{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ 。(1 分)										
(3)	設雙曲線 $\Gamma: -3x^2 + y^2 = 3$ 的漸近線 L_1 、 L_2 ， $P(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 是雙曲線 Γ 上一點，過 P 作 L_3 、 L_4 分別與 L_1 、 L_2 平行，試求由 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 所圍之平行四邊形面積為_____。(4 分) 如圖，設 $d_1 = d(P, L_1)$ 、 $d_2 = d(P, L_2)$ ， 平行四邊形邊長分別為 l_1 、 l_2 ， L_1 、 L_2 所夾銳角為 60° (1 分) 由圖知 $l_2 \times \sin 60^\circ = d_2 \Rightarrow l_2 = \frac{d_2}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} d_2$ (1 分) 由(2)知 $d_1 \times d_2 = \frac{3 \times 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}$ (1 分) 所求面積 $= l_2 \times d_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} d_2 \times d_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1 分)										

