

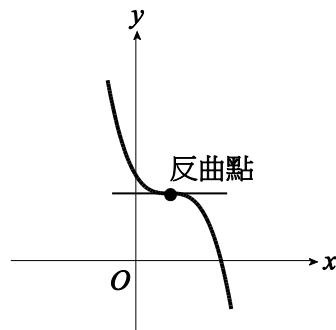
武陵高中 113 學年度第一學期數學科高三數甲期中考試題

範圍:選修數甲(上)單元微分 (301-316, 320)

一、多選題: 20%(每題 10 分, 錯 1 選項得 6 分, 錯 2 選項得 2 分, 錯 3 選項以上得 0 分)

1. 右圖為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形, a, b, c, d 為實數, 在反曲點所作的切線為水平切線, 請選出正確的選項:

- (1) $b > 0$ (2) $c > 0$ (3) $3a + 2b + c \leq 0$
(4) $6a - 2b > 0$ (5) $b^2 - 3ac = 0$



2. 關於多項式函數 $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, a, b, c, d, e 為實數, 下列各敘述哪些正確?

- (1) $f(x)$ 在 $x=0$ 的近似直線為 $y = dx + e$
(2) $f(x)$ 在 $x=a$ 的近似直線為 $y = f'(a)x + f(a)$
(3) 若 $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, 則 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2$ 的餘式是 0
(4) 若 $(x-a)^2$ 是 $f(x)$ 的因式, 則 $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$
(5) 若 $f'(a)f''(a) > 0$, 則可找到一個區間 (p, q) , $a \in (p, q)$, 使得 $f(x)$ 在區間 (p, q) 為遞增函數

二. 選填題 I: 請在答案卡上對應的位置劃記答案 40%(每格 8 分)

A. 多項式函數 $f(x) = (x^2 + 2x - 5)(x^2 - x)$, 試求 $f'(1) = \underline{\textcircled{3}} \underline{\textcircled{4}}$ 。

B. 函數 $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2}$ ，試求 $f'(-1) = \underline{\textcircled{5}}$ 。

C. 多項式函數 $f(x) = (x^2 + 2)^4$ ，試求二階導數 $f''(0) = \underline{\textcircled{6} \textcircled{7}}$ 。

D. 多項式函數 $f(x) = x^3 - 3x - 5$ ，定義域為 $[-5, 2]$ ，試求 $f(x)$ 的最大值為 $\textcircled{8} \textcircled{9}$ 。

E. 多項式函數 $f(x) = x^5 - 7x + 7$ ，試求 $f(0.99)$ 的近似值 $\textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12}$ 。(四捨五入至小數點後第 2 位)

三. 選填題 II：請在答案卡上對應的位置劃記答案 25%(每格 5 分)

F. 函數 $f(x) = x^3 - 2x$ ，以 $(1, f(1))$ 為切點所作的切線與 x 軸交於 $(a_1, 0)$ ，以 $(a_1, f(a_1))$ 為切點所作的切線與 x 軸交於 $(a_2, 0)$ ，試求 $a_2 = \underline{\textcircled{13} \textcircled{14}}$ 。(化簡為最簡分數)

G. 函數 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ，利用導數的定義求 $f'(3) = \frac{\textcircled{15}\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(化簡為最簡分數)

H. 已知 $y = x^3 + 4x^2 - 9x - 7$ 與 $y = x^2 + k$ 的圖形有三個相異交點，試求 k 的範圍為

$\textcircled{18}\textcircled{19}\textcircled{20} < k < \textcircled{21}\textcircled{22}$ 。

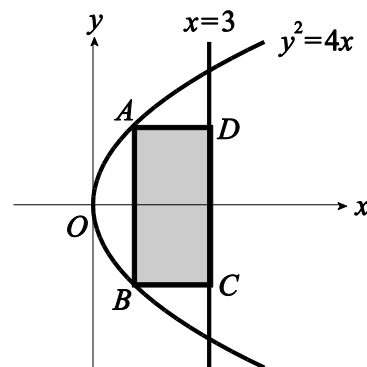
I. 函數 $f(x) = x[x]$ ，其中 $[]$ 為高斯符號，試求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{2} - h) - f(\sqrt{2})}{h} = \underline{\textcircled{23}\textcircled{24}}$ 。

J. 多項式函數 $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 8$ ， $y = f(x)$ 圖形上有相異兩點 $P(-1, 1)$ 、 $Q(a, b)$ ，若直線 PQ 為

$y = f(x)$ 的一條切線， Q 為切點，試求 $a = \underline{\textcircled{25}\textcircled{26}}$ 。

四. 計算題：15% (計算題需要完整過程，否則不計分)

1. 如圖，曲線 $y^2 = 4x$ 與直線 $x = 3$ 的內接矩形 $ABCD$ ， C 、 D 在直線 $x = 3$ 上， A 在直線 $x = 3$ 左側，求矩形 $ABCD$ 最大面積為多少？(8%)

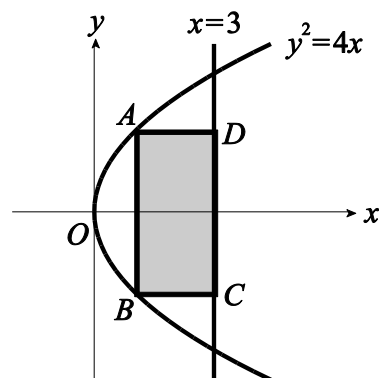


2. 多項式函數 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ ，求出函數圖形的反曲點座標(7%)

武陵高中 113 學年上學期數甲高三第二次期中考答案卷

三. 計算題：15% (需要完整過程，否則不計分)

1.



2.

武陵高中 113 學年上學期數甲高三第二次期中考答案卷

四. 計算題：15%(需要完整過程，否則不計分)

1. 令 $A(x, 2\sqrt{x})$ $D(3, 2\sqrt{x})$

A 在第一象限， $0 < x < 3$

$$ABCD \text{ 面積為 } 2 \times (3-x) \times 2\sqrt{x} = \sqrt{16x(3-x)^2}$$

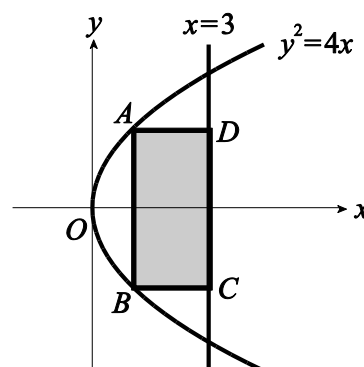
$$\text{令 } f(x) = 16x(x-3)^2 = 16(x^3 - 6x^2 + 9x), \quad 0 < x < 3$$

$$f'(x) = 16(3x^2 - 12x + 9) = 48(x-3)(x-1)$$

x	0	1	3
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	↗ 64	↘ 0

$x=1$ 時 $f(x)$ 有最大值 64 $ABCD$ 面積最大值為 8

(函數有各種不同令法 令函數+寫出定義域 3% 算出最大值過程+解 5%)



2. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$

$$f''(x) = 36x^2 + 24x = 12x(3x + 2)$$

x	$-\frac{2}{3}$	0
$f''(x)$	+	-
凹向變化	U	∩

$x=0, x=-\frac{2}{3}$ 處皆為反曲點

反曲點 $(0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ 7%

多選題 20%

1	135	2	134
---	-----	---	-----

填充題：65%(前 5 題每題 8 分 後 5 題每題 5 分)

A -2	B 3	C 64	D -3	E 1.02
F $\frac{8}{5}$	G $-\frac{3}{4}$	H $-12 < k < 20$	I -1	J -4