

範圍：矩陣

座號：____ 姓名：_____

注意：試題共一張兩面，答案卡一張

一、多重選擇題，每題 8 分，答錯 1 個選項得 5 分，答錯 2 個選項得 2 分，答

錯 3 個(含)選項以上得 0 分，共 16 分

1、設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，則下列各式何者恆成立？

- (1) $A(BC) = (AB)C$
- (2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
- (3) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
- (4) 若 $AB = O$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = O$
- (5) $A(B+C) = (C+B)A$ 。

2、設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣，且 A 、 B 、 C 的反方陣 A^{-1} 、 B^{-1} 、 C^{-1} 均存在，下列敘述何者正確？

- (1) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (2) 若 $AB = BA = I$ ，則 $B = A^{-1}$
- (3) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$
- (4) 若 $AB = I$ 則 $BA = I$
- (5) $A^3 - 8I = (A - 2I)(A^2 + 2A + 4I)$

二、選填題 12 題，第 A 題至第 L 題，每題請依照答案格式將答案畫記到答案卡

上。各題每格全部答對才得分，答案需計算至最簡，答案全對始計分，答

錯或不作答不予計分，每題 7 分共 84 分。例：若某一題的答案格式是 ⑬ ⑭，

而依題意計算出來的答案是 38，則必需分別在答案卡上的第 18 列的 $\square^3$ 與第

19 列的 $\square^8$ 畫記

18	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^+$
19	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^+$

A、若 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，若 $2A - C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，試求 $a + b + c + d$ 之值

= ③ ④

B、矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 滿足 $a_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ 2, i > j \\ 3, i < j \end{cases}$ ，試求矩陣 A 的所有元素和 = ⑤ ⑥

C、設 n 為自然數， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若 $A^n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 n 的最小值 = ⑦

D、考慮實數二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$ ，則 $c - 2b$ 的值 = ⑧ ⑨

E、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ ， I 為二階單位方陣，若矩陣 $A - I$ 及 $A + I$ 的反方陣都不存在，試求數對

$(x, y) =$ (⑩ ⑪, ⑫ ⑬)

F、考慮坐標平面上的直線 $L: 3x - 2y = 1$ 。若 a 為實數且二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換

可以將 L 上的點變換到一條斜率為 2 的直線上，試求 $a = \underline{\textcircled{14} \textcircled{15}}$

G、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $A \neq kI$ ， $a, b, c, d, k \in R$ ，其中 I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，

已知 $A^2 - 3A = I$ ，若 $A^{-1} = sA + tI$ ，其中 s, t 均為實數，試求 $5s - 2t = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{16}}$

H、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ，其中 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 為矩陣

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣。若 $A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，試求 $a + b + c + d = \underline{\textcircled{18} \textcircled{19}}$

I、設矩陣 $A = [a_{ij}]_{10 \times 5}$ ， $B = [b_{ij}]_{5 \times 10}$ ，其中 $a_{ij} = i + j$ ， $b_{ij} = i - j$ ，若 $AB = C = [c_{ij}]_{10 \times 10}$ ，試求

$c_{55} = \underline{\textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}}$

J、設數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1} = a_n + b_n$ 且 $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ ，且存在二階方陣 A ，使得 $A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}$ ，已

知 $a_{10} = 116$ ， $b_{10} = 6$ ，求數對 $(a_7, b_7) = (\textcircled{23} \textcircled{24}, \textcircled{25} \textcircled{26})$

K、設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + \frac{1}{2}A)^4 = aI + bA$ ，試求實數對 $(a, b) = (\textcircled{27}, \textcircled{28} \textcircled{29})$

L、設二階方陣 A 對於任何實數 a 、 b ， $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ 均成立。若 $A^{2020} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ，試求數對

$(m, n) = (\textcircled{30}, \textcircled{31})$

Ans :

1 、 1

2 、 2345

A 、 -6

B 、 15

C 、 4

D 、 -4

E 、 $(-3, -2)$

F 、 14

G 、 -1

H 、 14

I 、 -70

J 、 $(32, 48)$

K 、 $(1, 20)$

L 、 $(1, 0)$