

一.多重選擇題(每題全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，未作答得 0 分)

1.下列哪些選項的極限值或不存在？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2]$ ([] 為高斯符號)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 。

2.下列哪些選項是正確的？

(1)若已知數列 $\langle a_n \rangle$ ， $a_n < 1$ 恆成立，且 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

(2)數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，若數列 $\langle S_n \rangle$ 收斂，則數列 $\langle a_n \rangle$ 必收斂到 0

(3)有三數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 對所有的正整數 n ， $a_n \leq b_n \leq c_n$ 恆成立，若 $\langle a_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2}$

(5)已知 $f(x)$ 為實函數，若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 存在，則 $f(1) = 0$ 。

3.已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 3}, & \text{當 } x \neq 3 \text{ 時} \\ m, & \text{當 } x = 3 \text{ 時} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + b}{x + 7}, & \text{當 } x \neq -7 \text{ 時} \\ n, & \text{當 } x = -7 \text{ 時} \end{cases}$ ，其中 $a, b, m, n \in R$ ，試問下列哪

些選項是正確的？

(1)無論 a, m 為何值， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = m$

(2)無論 b, n 為何值， $\lim_{x \rightarrow -7} g(x) = g(-7)$

(3)當 $a = 9, b = 49$ 時， $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 10$

(4)當 $a = 9, b = 49$ 時， $\lim_{x \rightarrow t} f(x) + \lim_{x \rightarrow t} g(x) = 10$ ，其中 $t \in R$

(5)若 $a = 9, b = 49$ 且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為連續函數，則 $m + n = 20$ 。

二.填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	20	27	34	40	46	50	54	57	60

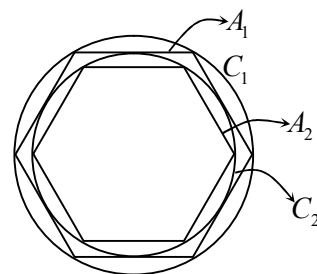
(如果極限不存在，請填入「不存在」)

1. 求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 求極限值 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} + \frac{3x + 1}{x^2 - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足： $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n - 3$ ， $n \in N$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 如右圖，在半徑為 10 的圓 C_1 內作一個內接正六邊形 A_1 ，
 再作此正六邊形 A_1 的內切圓 C_2 ，在圓 C_2 內再作內接正六邊形 A_2 ，
 如此繼續做下去。若 S_n 為前 n 個圓 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ 的面積之和，
 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



5. 若無窮級數 $x + x(2x - 5) + x(2x - 5)^2 + \dots + x(2x - 5)^{n-1} + \dots$ 收斂，且其和為 $\frac{-5}{16x - 42}$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6.若實函數 $g(x)$ 為實函數 $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1)$ 的反函數，則 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7.令 $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{3k(3k-1)}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8.已知數列 $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^{n+1} + 2^{n+3}}{3^{n-1}} \right\rangle$ 收斂至 k ，若希望 $|a_n - k| < 10^{-8}$ ，則最小的正整數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

9.設無窮等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為 r ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{7^n} = 9$ ，試求數對 $(a_1, r) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10.一般來說，我們知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ ，試求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n}{2n+3})^{2n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三.計算題(共 16 分)

1.設多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + 16x$, $a < 0$, 已知 $f(x) = 0$ 的解中, 有二個相等的實根, 試回答下二問題:

(1)試求 a 值。(4 分)

(2)方程式 $f(x) = -3x^2 + 13x - 5$ 在哪些相鄰的整數之間有實根?(4 分)

2.若 a, b 為實數且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos bx}{x \sin bx} = \frac{1}{4}$, 試回答下二問題:

(1)試求 a 值。(4 分)

(2)試求 b 值。(4 分)

(可能用得到的公式: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cos x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

桃園市立武陵高級中學 113 學年度第一學期第一次期中考高三數學甲答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一.多重選擇題(每題全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，未作答得 0 分)

1.	2.	3.

二.填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	20	27	34	40	46	50	54	57	60

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.		

三.計算題(共 16 分)

1.
2.

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一.多重選擇題(每題全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，未作答得 0 分)

1.	2.	3.
(4)(5)	(2)	(2)(3)(4)(5)

二.填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	20	27	34	40	46	50	54	57	60

1.	2.	3.	4.
0	$\frac{1}{3}$	不存在	400π
5.	6.	7.	8.
$\frac{5}{2}$	$\sqrt[3]{x+1}$	$\frac{3}{2}$	54
9.	10.		
(54,7)	$\frac{1}{e^3}$		

三.計算題(共 16 分)

1. (1) $f(x) = x(x^2 + ax + 16) = 0$

因為 $f(x) = 0$ 的解中，有二個相等的實根，所以 $a^2 - 64 = 0, a < 0 \Rightarrow a = -8$ (4 分)

(2) $f(x) = -3x^2 + 13x - 5 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$

令 $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ (1 分)

$\Rightarrow$

x	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-4	5	4	-1	-4	1

所以在區間 $(-1, 0), (1, 2), (3, 4)$ 中， $g(x) = 0$ 各有一個實根。 (3 分)

2. (1) 因為 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos bx}{x \sin bx}$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin bx = 0$ ，

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos bx) = 0 \Rightarrow a = 1$ (4 分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos bx}{x \sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos bx}{x \sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{bx}{2}}{2x \sin \frac{bx}{2} \cos \frac{bx}{2}}$ (2 分)

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{bx}{2}} \right] = \frac{b}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ (2 分)

