

市立武陵高級中學 108 學年度第二學期高三自然組期末考數學試題

範圍：選修數學(甲)下 第二章全

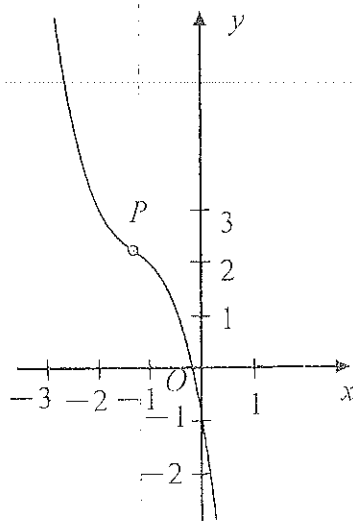
一、多重選擇題：每題 8 分，共 16 分 (選項錯一個得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上得 0 分)

() 1. 設 $f(x)$ 為多項式，另設 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \geq 0$ ，下列敘述均考慮 x 在區間 $[0, \infty)$ 的範圍時，何者正確？

- (1) 若 $f(x) > 0$ 恆成立，則 $F(x) > 0$ 恆成立 (2) 若 $F(x) > 0$ 恆成立，則 $f(x) > 0$ 恆成立
 (3) 若 $f(x) > 0$ 恆成立，則 $F(x)$ 嚴格遞增 (4) 若 $F(x)$ 嚴格遞增，則 $f(x) > 0$ 恆成立
 (5) 若 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有 3 個交點，則 $y = F(x)$ 的圖形與 x 軸有 4 個交點

() 2. 三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如下，其中 P 為圖形的反曲點，判斷下列哪些選項中的值為負數？

- (1) b (2) c (3) $3ac - b^2$ (4) $b - 6a$ (5) $a + c - d + 1$



二、填充題：每格 6 分，共 60 分

1. 設 $f(x) = \sqrt{8 + [10x^2 - 1]}$ ，其中 $[]$ 為高斯記號，求 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 求下列定積分之值：

(1) $\int_{-73}^{73} (123x^5 + 987x^3 - 46x + 5) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\int_0^1 (2x-1)^{10} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 函數 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$ 的圖形在閉區間 $[0, 10]$ 上的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對

$(M, m) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 若直線 $L: y = 2x + 3$ 為曲線 $\Gamma: y = 2x^3 - 4x + k$ 的切線，試求 k 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$

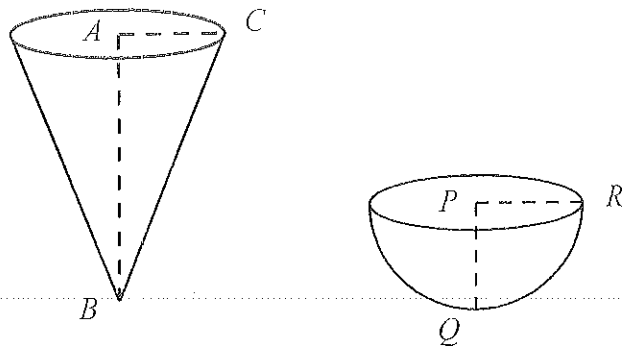
5. 圖形過原點的三次多項式函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 有極大值 4，且在 $x = 2$ 有反曲點，試求 $f(x)$ 的極小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$

6. 實數 a 可使方程式 $ax^3 - 12ax + a^2 - 17 = 0$ 恰有一個實根的條件為 $\underline{\hspace{2cm}}$

7. 試求 $\int_{-2\sqrt{2}}^3 \sqrt{10 - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 已知 $f(x)$ 為一多項式，且 $f(x) = -x + \int_1^x |f(t)| dt$ ，試求 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 如圖所示，Sunny 為了慶祝自己與好朋友 Melody 是這次班上數學期末考唯二及格的學生，帶了個底半徑 $\overline{AC} = 6$ 吋，高 $\overline{AB} = 12$ 吋的直圓錐杯裝滿飲料要與 Melody 共享。但基於防疫的衛生考量，Melody 向數學老師借了一個容器分裝，其形狀是以平面將球體表面分割成兩部分後取其中較小部分的碗：其中碗口的圓半徑 $\overline{PR} = 8$ 吋，碗深 $\overline{PQ} = 4$ 吋。Sunny 將直圓錐杯中的飲料倒入直立於桌面上的碗 (\overline{PQ} 垂直桌面於 Q)，至裝滿時停止，此時將直圓錐杯直立於桌面上 (\overline{AB} 垂直桌面於 B)，杯中所剩餘飲料之表面距離桌面的高度為 _____ 吋 (不考慮液體的表面張力)



三、計算作圖題：每題 12 分，共 24 分(需有計算過程，違者不予計分)

1. 設 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ，則：

(1) 描繪 $f(x)$ 的函數圖形 (標示出反曲點與極值發生的點坐標) (6 分)

(2) 試求將 $[0, 6]$ 平分 3 等分， $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 0$ ， $x = 0$ 及 $x = 6$ 所圍成區域的上和 U_3 與下和 L_3 之值 (6 分)

2. 若兩多項式函數 $f(x) = -x^3 + 2x^2$ ， $g(x) = x^2 - 2x$ 的圖形與 $x = 0$ 及 $x = 1$ 所圍成的區域為 R ，則：

(1) 求 R 的面積 (6 分)

(2) 將 R 繞 x 軸旋轉一周所得的旋轉體體積為何 (6 分)

202, 204-215

市立武陵高級中學 108 學年度第二學期高三自然組期末考數學答案卷

範圍：選修數學(甲)下 第二章全

____ 班 ____ 號 姓名 _____

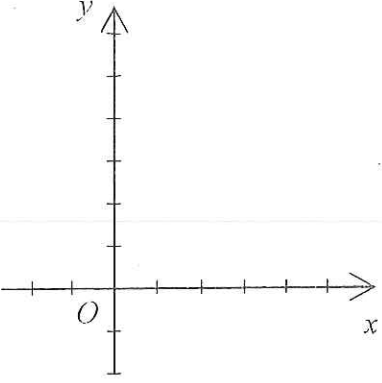
一、多重選擇題：每題 8 分，共 16 分 (選項錯一個得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上得 0 分)

1.	2.
----	----

二、填充題：每格 6 分，共 60 分

1.	2.(1)	2.(2)	3.
4.	5.	6.	7.
8.	9.		

三、計算作圖題：每題 12 分，共 24 分(需有計算過程，違者不予計分)

1. 	2.
--	----

202, 204 → 215

市立武陵高級中學 108 學年度第二學期高三自然組期末考數學答案卷

範圍：選修數學(甲)下 第二章全

一、多重選擇題：每題 8 分，共 16 分 (選項錯一個得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上得 0 分)

1. (3)	2. (1)(2)(5)
---------------	---------------------

二、填充題：每格 6 分，共 60 分

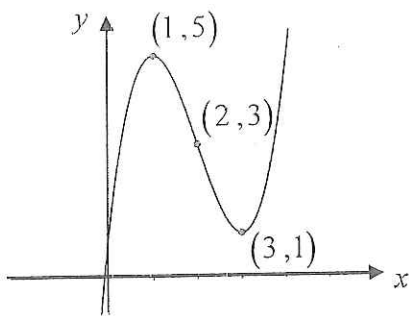
1. 0	2.(1) 730	2.(2) $\frac{1}{11}$	3. (254, -21)
4. -1 或 7	5. 0	6. $a < -17$ 或 $-1 < a < 1$ 或 $a > 17$ ，但 $a \neq 0$	7. $\frac{14+15\pi}{4}$
8. 2 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	9. 4		

三、計算作圖題：每題 12 分，共 24 分(需有計算過程，違者不予計分)

1.(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

x	1	2	3
$f'(x)$	+ 0 -	- 0 +	- 0 +
$f''(x)$	-	- 0 +	+ 0 +
$f(x)$	5		1



(2) $U_3 = [f(1) + f(4) + f(6)] \times 2 = 130$

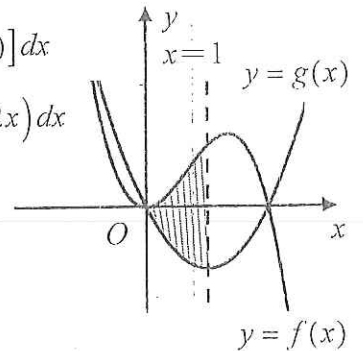
$L_3 = [f(0) + f(3) + f(4)] \times 2 = 14$

2.(1) R 的面積為

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x^2 + 2x) dx$$

$$= \frac{13}{12}$$



(2) 當 $0 \leq x \leq 2$ 時

解 $\begin{cases} y = -x^3 + 2x^2 \\ y = |x^2 - 2x| \end{cases}$ 得 $x = 0, 1$ 或 2

且 $|g(x)| \geq f(x)$ 在區間 $[0, 1]$ 上

故 R 繞 x 軸旋轉一周所得的旋轉體體積為

$$\int_0^1 \pi [g(x)]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx$$

$$= \frac{8\pi}{15}$$