

範圍：第四冊 §2-2 ~ §3-3 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題 (每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上不給分)

1. () 在坐標空間中，有關直線的概念哪些是正確的？(多選)

(A) $x+2y=0$ 代表通過原點的直線

(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$ 與 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{6} = \frac{z}{2}$ 互相平行

(C) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$ 表示空間中的直線

(D) $\begin{cases} x=2t \\ y=3-t \\ z=-2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與 $\begin{cases} x=2+6s \\ y=2-3s \\ z=1+9s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ 分別代表不同的兩條直線

(E) $\frac{x-3}{5} = \frac{z-4}{2}, y=5$ 代表一條方向向量為 $(5, 0, 2)$ 的直線。

2. () 設 c, d 為實數，下列有關於線性方程組 $\begin{cases} x+y+cz=0 \\ x+cy+z=1 \\ y+z=d \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(A) 若此線性方程組有解時，則必定恰有一組解

(B) 若此線性方程組有解時，則 $c \neq 1$ (C) 若此線性方程組有解時，則 $d = 0$

(D) 若此線性方程組無解時，則 $c = 1$ (E) 若此線性方程組無解時，則 $d \neq 0$ 。

3. () 設 R, S 皆為三階方陣，若 $R+S=I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $RS=O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些

選項是正確的？

(A) $RS \neq SR$ (B) $R=O$ 或 $S=O$ (C) $R^2+S^2 \neq I$ (D) $R^3+S^3 = R^2+S^2$

(E) $R^4+S^4 = I$ 。

二、填充題 (每個空格 6 分, 共 66 分), 分數答案皆化成最簡分數

1. 已知相交兩直線 $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$, $L_2: x=2+3t, y=t, z=-3+t, t \in \mathbb{R}$, 則包含 L_1, L_2

的平面方程式為 $2x+ay+bz=c$, 請問數對 (a,b,c) 為_____。

2. 已知 $A(x_1, y_1, z_1), B$ 為空間中兩點, 設向量 $\overline{AB}=(a,b,c)$, 直線 \overline{AB} 的參數式為

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases}, \text{ 其中 } t \in \mathbb{R}, \text{ 將 } t=-0.4 \text{ 代入直線 } \overline{AB} \text{ 的參數式中得直線 } \overline{AB} \text{ 上一點 } P, \text{ 則}$$

$\overline{BP}:\overline{AP}$ 的比值為_____。

3. 已知方程組 $\begin{cases} 3x+y+z=a \\ x+3y-3z=1+a \\ x-y+2z=1-a \end{cases}$, 若方程組有解, 且 (a, b, c) 為其中一解, 則 $b^2-c^2 =$ _____。

4. 已知三階方陣 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 則數對 (a, b) 為_____。

5. 某便利商店將 2400 元全部換成 a 個 5 元及 b 個 1 元硬幣供客人兌換零錢，假設便利商店僅供應三種兌換零錢方式：(甲)將 10 元換成 2 個 5 元硬幣，(乙)將 10 元換成 1 個 5 元硬幣及 5 個 1 元硬幣，(丙)將 10 元換成 10 個 1 元硬幣。若規定：每位客人限兌換零錢一次。已知以(甲)(丙)兩種兌換方式的人數總和等於(乙)種兌換方式的人數，且以(甲)(乙)兩種兌換方式的人數總和等於(丙)種兌換方式人數的 2 倍。假設 2400 元硬幣正好完全兌換完畢。則數對 (a, b) 為_____。

6. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則：(1) 試求 $A^2 - 4A =$ _____。

(2) 試求 $A^4 - 4A^3 - 8A^2 + 21A + 36I_2 =$ _____。

7. 設 a, b, c 為實數滿足方程組 $\begin{cases} x+2y+2z=a \\ 2x-y+z=b \\ -3x-y-3z=c \end{cases}$ 有無限多組解，且 $a^2+b^2+c^2=14$ ，則

$ab+bc+ca$ 之值為_____。

8. 二平面 $E_1: x+3y-z=-4$ 與 $E_2: 2x+5y+z=-1$ 之交線 L 的對稱比例式為 $\frac{x-1}{8} = \frac{y-a}{b} = \frac{z-c}{d}$ ，

則 $a+b+c+d =$ _____。

9. 設甲袋有 10 元硬幣 1 枚，乙袋有 5 元硬幣 3 枚。每一輪操作“各從甲、乙袋中任取出一枚硬幣，互換後放回袋內”。求第五輪操作後甲袋仍有一枚 10 元硬幣的機率為_____。

10. 我們利用矩陣將英文字母編碼如表：

字母	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
矩陣	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

字母	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
矩陣	$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

例如將訊息“*car*”這個單字編碼成為矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ 。今某甲和某乙為了保密，約定將要傳送的訊息

先編成矩陣 X ，選用一個矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，再將編碼矩陣 AX 的結果傳給對方。現假設某乙收到的

訊息矩陣為 $\begin{bmatrix} 11 & 5 & 7 & 27 & 13 & 21 & 24 & 28 \\ 19 & 9 & 12 & 45 & 22 & 35 & 40 & 47 \end{bmatrix}$ ，則某甲傳送的訊息為_____。

三、計算證明題 (無計算過程不予計分，共 10 分)

1. 設 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 為二階實係數方陣。

(1) 當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a 、 b 、 c 、 d 須滿足的條件。(2 分)

(2) 試證：當 A 為轉移矩陣時， A^2 也是轉移矩陣 (式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積)。(8 分)

216-220

桃園市立武陵高級中學 108 學年度第二學期 高二數學科(社會組) 第二次期中考

範圍：第四冊 §2-2 ~ §3-3 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上得 0 分)

1	2	3
【(B)(E)】	【(A)(B)(D)】	【(D)(E)】

二、填充題(每個空格 6 分，共 66 分)

※分數答案皆化成最簡分數

1	2	3	4	5
【(-9, 3, -5)】	【 $\frac{7}{2}$ 】	【-1】	【 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 】	【(200, 1400)】
6(1)	6(2)	7	8	9
【 $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 】	【 $\begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 36 & 48 \end{bmatrix}$ 】	【-7】	【-3】	【 $\frac{20}{81}$ 】
10				
【wulingshs】				

三、計算證明題 (無計算過程不予計分，共 10 分)

(1) (2 分)	(2) (8 分)
<p>設 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 為二階實係數方陣。</p> <p>(1) 當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a、b、c、d 須滿足的條件。</p> <p>〈解〉</p> <p>根據轉移矩陣的定義，得知條件為 a、b、c、$d \geq 0$ (給 1 分)，且 $a+c=1$，$b+d=1$。(給 1 分)</p>	<p>(2) 試證：當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣 (式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積)。</p> <p>〈解〉</p> <p>根據矩陣乘積的定義，得</p> $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix},$ <p>因為 a、b、c、$d \geq 0$，所以 A^2 的每一個元素都是大於或等於 0 (給 2 分)，而且由 $a+c=1$，$b+d=1$，得</p> $(a^2+bc)+(ac+cd) = a(a+c)+c(b+d) = a+c=1,$ <p>(給 3 分)</p> $(ab+bd)+(bc+d^2) = b(a+c)+d(b+d) = b+d=1$ <p>(給 3 分)，故當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣。</p>