202, 204-215

桃園市立武陵高中108學年度第二學期第二次段考高二自然組數學科試題

一、多重選擇題：(每題6分，答錯或多選1個選項扣2分)

1. 考慮 x, y, z 的方程組 $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=4 \\ 2x+3y+az=8 \end{cases}$，其中 a 為實數．請選出正確的選項：

(A)此方程組可能無解　(B)若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $x=1$

(C)若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $y>z$　(D)當 $a\neq-3$ 時，恰有一組 (x,y,z) 滿足此方程組

(E)當 $a=-3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x,y,z) 會在一條直線上．

2. 下列關於空間中的敘述，哪些選項正確？

(A)方程式 $\begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$ 的圖形為一直線　　(B)方程式 $x+y=1$ 的圖形與 z 軸垂直

(C)方程式 $x^2+y^2=4$ 的圖形為一圓

(D)二直線 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$ 與 L_2：$x=y=z$ 互相垂直

(E)若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 三非零向量兩兩不平行，則空間向量任一向量 $\overrightarrow{d}$ 必可表為 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 的線性組合．

3. 設 A，B，C 皆為二階矩陣，I 為二階單位矩陣，O 為二階零矩陣，則下列各敘述哪些為真？　(A) $A^3+I=(A+I)(A^2-A+I)$　(B) 若 $A^2=A$，則 $A=O$ 或 $A=I$

(C)若 $AB=I$，則 $B^2A^2=I$．　(D) $(AB)^n=A^nB^n$

(E) 若 A, B, C 均為轉移矩陣，則 $\dfrac{1}{3}(A^2+B^2+C^2)$ 也是轉移矩陣．

二、填充題：

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
累計得分	8	16	24	30	36	42	48	52	56	60

1. 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$，則 $(m,n,a_{33})=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿．

2. 已知空間中平面 $x-2y+3z=5$ 與另兩平面 $2x+y-3z=-3$，$3x-y+2z=6$ 分別交於一直線，則此兩直線的交點坐標為＿＿＿＿＿＿＿＿．

3. 已知 $\begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=3\alpha+4\beta \end{cases}$ 且 $\begin{cases} \alpha=u+v \\ \beta=u-v \end{cases}$，利用矩陣的乘法可得：$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，其中 A 是一個二階方陣，求矩陣 $A=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿．

4. 在坐標空間中，已知兩點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 與 $B(x_1,y_1,z_1)$，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式為

$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$，$t$ 為實數．若將 $t=-\dfrac{1}{5}$ 代入直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式中，可以得到 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的一點 P，則 $\overline{AP}:\overline{BP}$ 的比值為__________

5. 設矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & a \\ 2 & -3 & b & 8 \\ c & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 經列運算變為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -19 & -17 \\ 0 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 7 & -8 & -29 \end{bmatrix}$，則序組$(a,b,c)=$__________．

6. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，若 $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=-30$，則三向量 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}-3\overrightarrow{a}$ 所張成的平行六面體體積為__________．

7. 設二階方陣 A 滿足 $A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$A^6=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$，$A^{10}=\begin{bmatrix} -18 & -5 \\ 25 & 7 \end{bmatrix}$，試求序組$(a,b,c,d)=$ __________．

8. 空間中有兩直線 $L_1:\begin{cases} x-y=3 \\ z=a \end{cases}$ 與 $L_2:\dfrac{x-2a}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=z-4$ 相交於點 P，且過 P 有一直線 $L:\dfrac{x}{d}=\dfrac{y-b}{e}=z-c$ 為 L_1 與 L_2 的角平分線，若 $d>0$，則 $a+b+c+d-e=$__________。

9. 有 A，B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水，每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出三分之一到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出三分之一回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）．設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液．已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，

(1)求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=$__________．

(2)當 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？__________%．(算到小數點後一位，四捨五入至整數)．

三、計算題：(第 1 題 10 分，第 2 題 12 分)

1. 已知正立方體有 12 條稜邊，其中兩稜邊所在的直線方程式分別為 L_1：$\begin{cases} 2x-y=0 \\ y+2z=8 \end{cases}$ 與 L_2：$\begin{cases} x+y=2 \\ y+2z=3 \end{cases}$，試求此正立方體的體積為__________立方單位． $5\sqrt{5}$

2. 試就實數 k 值討論三元一次聯立方程式 $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=k \end{cases}$ 的解並求其解，敘述其幾何意義．

202, 204－215

桃園市立武陵高中 108 學年度第二學期第二次段考高二自然組數學科答案卷

一、 多重選擇題：(每題 6 分，答錯或多選 1 個選項扣 2 分)

1. BCDE	2. A	3. ACE

二、 填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
累計得分	8	16	24	30	36	42	48	52	56	60

1. (5,4,24)	2. (1,1,2)	3. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -7 & 3\end{bmatrix}$	4. $\frac{1}{6}$
5. (11, − 5,3)	6. 210	7. (− 3, − 1,5,2)	8. 4
9.(1) $\begin{bmatrix}\frac{7}{9} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$	9.(2) 59		

三、 計算題：(第 1 題 10 分，第 2 題 12 分)

1.(1)說明直線 L_1 與直線 L_2 不平行(2 分).

(2)說明直線 L_1 與直線 L_2 不相交(2 分).

(3)求出直線 L_1 直線 L_2 的距離為 $\sqrt{5}$ (5 分)

(4)正立方體的體積為 $(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$ (1 分).

2. $\Delta=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)$ (2 分)

$\Delta x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ k & 1 & k\end{vmatrix}=0$ (1 分)，$\Delta y=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & k & k\end{vmatrix}=0$ (1 分)，

$\Delta z=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=\Delta$ (1 分)

(1) $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 時，三平面交於一點(1 分)(0,0,1)．(1 分)

(2) $k=1\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ 三平面重合(1 分)，其解為

$\begin{cases}x=t\\ y=k\\ z=1-t-k\end{cases}$，$t,k\in\mathbb{R}$ (2 分).

(3) $k=-2\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+z=1\\ x-2y+z=1\\ x+y+2z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-3y=0\\ 3x-3y=0\end{cases}\Rightarrow$ 三平面交於一線(1 分)，其解為 $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ (1 分).