302-315

市立武陵高中108學年度第二學期高三自然組第一次段考數學科試題

一、填充題(每題6分、共60分)

1. 求下列各式之極限值：(若極限值不存在則填入<u>不存在</u>)

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5x-9}{x^2-4x+3})=$ ________　(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{4^n}{2^{2n}+3^n}+\dfrac{5^{n+2}}{6^n})=$ ________

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{3n^2+3}+\ldots+\sqrt{3n^2+k}+\ldots+\sqrt{3n^2+3n}}{3n^2+2n+1}=$ ________

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(1-x)^{100}-1}{x-2}=$ ________

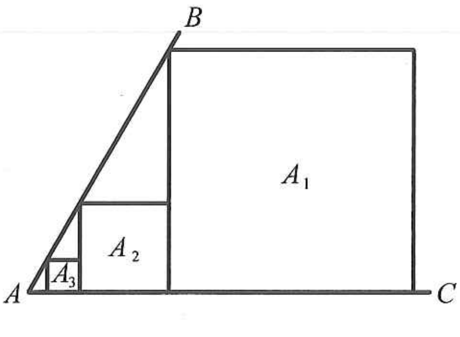
2. 已知實數a,b滿足$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-an)=b$，試求數對$(a,b)=$ ________

3. x為實數，若$1+(1-2x)+(1-2x)^2+(1-2x)^3+\ldots+(1-2x)^n+\ldots=\dfrac{2x}{-x+3}$，求 x= ________

4. 多項式$f(x)$滿足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，若$f(x)$ 除以$x(x-1)$的商式$Q(x)$，則 $Q(0)=$ ________

5. 設a、b為實數，若函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-x+b}{x-1}, & x>1\\ x^3+2, & x\le 1\end{cases}$ 為連續函數，求數對$(a,b)=$ ____

6. 如右圖，$\angle BAC=60°$，A_1、A_2、A_3、…均表正方形，若正方形A_1之邊長為2，求A_1、A_2、A_3、…無數多個正方形面積的和為 ________



7. 一盒子裡有n($n>6$)顆大小相同的球，其中有1顆紅球、2顆藍球以及$n-3$顆白球。從盒子裡隨機同時抽取3球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為$2n$分、n分及1分。若所得分數的期望值為E_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}E_n=$ ________

二、多重選擇題(每題 8 分、共 24 分，錯一個給 5 分、錯兩個給 2 分、錯三個以上不給分)

1. 下列關於無窮數列與級數的敘述，何者是**錯誤**的？ ____________

(A) 已知數列 $<a_n^2>$ 為收斂數列，則數列 $<a_n>$ 也是收斂數列

(B) 若數列 $<a_n>$ 為收斂數列且極限值為 L，則 $<a_{3n}>$ 也為收斂數列且極限值為 L

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂到 L、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂到 M，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$ 收斂到 $L \cdot M$

(D) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0+0+\cdots+0=0$

(E) $0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots+0.\overbrace{00\cdots0}^{n-1\text{個}}9+\cdots<1$

2. 下列關於函數的極限值與敘述，哪些是正確的？__________

(A) 若 $f(x)=x\cdot\sin(\frac{1}{x})$，則 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在

(B) 若 $f(x)=\frac{[2x]-[x]}{x}$，其中 $[\ ]$ 為高斯符號，則 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 存在

(C) 若 $f(x)$ 為一連續函數，若方程式 $f(x)=0$ 在 $(-2,-1)$ 間有實根，則 $f(-2)\cdot f(-1)<0$

(D) 若 $f(x)$ 為一連續函數，且 $f(a)=0$，則 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$ 存在

(E) 若 $f(x)$ 為一多項式函數，且 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^3-1}$ 存在，則 x^3-1 為 $f(x)$ 的因式

3. 設函數 $f(x)=\begin{cases}|x|, & -1\le x<1\\ -2x+3, & 1\le x<3\\ -x^2+8x-14, & 3\le x<5\end{cases}$，且 $f(x+6)=f(x)$，下列關於 $f(x)$ 的敘述，

何者正確? ____________ (A) $f(10)=2$ (B) $f(x)$ 的值域為 $[-3,2]$

(C) $\lim_{x\to -4} f(x)=-1$ (D) $\lim_{x\to 9} f(x)=1$ (E) $f(x)$ 在區間 $[-3,2]$ 上連續

背面有題

三、計算證明題(共 16 分)

1. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 10 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為 1、4，且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 Q_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。

   試問 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n =$ ______ (6%)

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$，

(1) 請寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項 $a_n =$ ____________(以 n 來表示)(2%)

(2) 請用數學歸納法證明(1)的答案 (6%)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =$ ___________ (2%)

302-315

市立武陵高中108學年度第二學期高三自然組第一次段考數學科答案卷

一、填充題(每題6分、共60分)　　班級:________　姓名:______________　座號:________

1.(a) 0	1.(b) 1	1.(c) $\sqrt{3}$	1.(d) 100	2. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$
3. $3/4$	4. -2	5. $(2,-1)$	6. $8\sqrt{3}/3$	7. 15

二、多重選擇題(每題8分、共24分，錯一個給5分、錯兩個給2分、錯三個以上不給分)

1. ACDE	2. B	3. ACE

三、計算證明題(共16分)

1. (6%) $\lim_{n\to\infty} Q(n) = 3$

2. 已知數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1 = 1$且$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$，

(1) 請寫出數列$\langle a_n \rangle$的一般項 $a_n =$ $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 或 $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ (以n來表示)(2%)

(2) 請用數學歸納法證明(1)的答案 (6%) (3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} =$ 2 (2%)