202, 204-215

桃園市立武陵高中108學年度第1學期高二自然組期末考試題

一、多選題：

1. $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 為平面上三個非零向量，下列何者恆成立？

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$　(2)若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$，可得 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$

(3) $\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\right)$　(4)若 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$，可得 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$

(5)一定存在 α,β 皆為實數，使 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{b}+\beta\overrightarrow{c}$

2. 關於直線 $L:\begin{cases}x=1+2t\\y=4-3t\end{cases}$，$t$ 為實數，下列選項何者正確？

(1) $(2,-3)$ 是 L 的一個方向向量　(2) L 通過 $(7,-5)$

(3) L 的斜率為 $-\dfrac{3}{2}$　(4) L 的方程式為 $3x+2y+11=0$

(5) L 與 $L':\begin{cases}x=3+2t\\y=1-3t\end{cases}$ (t 為實數)是同一直線

3. 已知 $\triangle ABC$，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，$\overrightarrow{AD}=\alpha\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$，

則

(1) $\alpha=\dfrac{2}{3}$　(2) $\alpha=\dfrac{4}{3}$　(3) $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$　(4) $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{a}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$　(5) $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BD}$

二、填充題

1. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,3),\overrightarrow{b}=(k,1)$，若 $\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)//\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$，則 $k=$__________。

2. 設 D,E 分別為 $\triangle ABC$ 兩邊 $\overline{AB},\overline{BC}$ 上的點，$\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{BE}=\dfrac{2}{3}\overline{BC}$。若 $\overrightarrow{DE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha+\beta=$__________。

3. 若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 是兩個不共線的非零向量，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 始點相同，則當 $\overrightarrow{a},t\overrightarrow{b},\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$ 三向量的終點共線時，$t=$__________。

4. 在平面上，已知$A(1,0)$，$B(0,1)$，點C在第二象限內，$\angle AOC=\dfrac{5\pi}{6}$，且$\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$，若$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，則$(\alpha,\beta)=$______________。

5. 在等腰$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，$\overline{AB}=\overline{AC}=2$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，則$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$___________。

6. 在坐標平面上，$\overrightarrow{OA}=(1,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,1)$，且$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$在直線$L$的方向向量上的投影的長度相等，則直線$L$的斜率為___________。

7. 平面上以$\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$為相鄰兩邊的平行四邊形面積為$\dfrac{5}{2}$，則以$4\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$與$2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$為相鄰兩邊的平行四邊形面積為_____________。

8. 坐標平面上，直線$L:2x+y=10$分別交x軸、y軸於A、B兩點，O表原點，若P為$\triangle OAB$區域內一點，P在直線L的垂足為H，則$\overline{OP}^2+\overline{PH}^2$的最小值為___________。

9. 已知$A(-1,2),B(-5,2),C(5,10)$，若$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC}$且$\overrightarrow{AD}$平分$\angle BAC$，則$\dfrac{t}{r}=$________。(需化為最簡分數，否則不給分)

10. 直線$L:x+y-2=0$平分兩直線$L_1:3x+4y-7=0$與L_2的夾角，則
(1)直線L_2的方程式為_________________。
(2)兩直線L_1,L_2相交所夾鈍角的角平分線方程式為___________________。

三、證明題

1. 平面上有一三角形ABC，O為平面上一固定點，在此平面上任取一點P，若$\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0$，請問O為$\triangle ABC$的內心、外心、重心或垂心？請說明理由。

2. 試就實數m的值討論聯立方程組$\begin{cases}mx+4y=m+2\\ my-m=-x\end{cases}$的解，並寫出其解。

桃園市立武陵高中 108 學年度第 1 學期高二自然組期末考答案卷

班級：　　　　座號：　　　　姓名：

一、多選題(每題 8 分，每題答錯 1 選項得 5 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項以上 0 分)

1		2		3	

二、填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	56	60

1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	
10 (1)		10 (2)			

三、計算與證明

1.(6 分)	2.(10 分)

202, 204–215

桃園市立武陵高中108學年度第1學期高二自然組期末考答案卷

班級：　　座號：　　姓名：

一、多選題(每題8分，每題答錯1選項得5分，答錯2選項得2分，答錯3選項以上0分)

1	(1)(4)	2	(1)(2)(3)(5)	3	(2)(4)

二、填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	56	60

1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$
4	$\left(-\sqrt{3},1\right)$	5	$-\frac{2}{3}$	6	$\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{4}{3}$
7	20	8	10	9	$\frac{5}{2}$
10 (1)	$4x+3y-7=0$	10 (2)	$x-y=0$		

三、計算與證明

1.(6分)

解：

$$\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0\text{ (2 分)}$$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0$$

可得$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$(2分，故$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$

所以 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。(2分)

2.(10分)

答：

(1) $m\neq\pm2$，方程式恰有一解(2分)，其解為

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{m+2}\\ y=\dfrac{m+1}{m+2}\end{cases}\text{ (2 分)}$$

(2) 當 $m=2$ 時，原方程組有無限多解(2分)，方程組的解可表示為

$$\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{2-t}{2}\end{cases}\ (t\in R)\text{ (2 分)}$$

(3)當 $m=-2$ 時，原方程組無解。(2分)