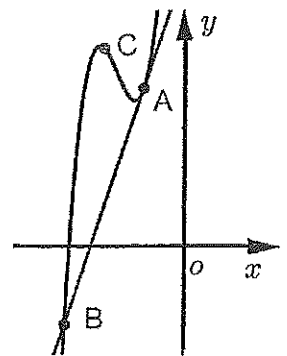


# 桃園市立武陵高中 108 學年度高一上學期期末考數學科試題卷

範圍：3-1~3-4

## 一、 填充題(每題 6 分，共 36 分)

- 班上有 38 位同學，要從中選出 2 名班代，每人投一票互選，則至少要\_\_\_\_\_票，才能保證選上班代。
- $f(x)$  為二次函數， $a$  為某實數，若  $f(x) < 0$  的解為  $a+2 < x < a+6$ ， $f(x) < 5$  的解為  $a+1 < x < 2a+10$ ，求  $a =$  \_\_\_\_\_
- 設  $f(x)$  是一個三次函數，且  $f(x) > 0$  的解為  $-1 < x < 1$  或  $x > 3$ ，則  $f(2x+3) < 0$  之解為\_\_\_\_\_
- 設多項式  $f(x) = (x-1)(x-9)(x-5)x + (x-1)(x+2)(x-10) + (x+8)(x-2) + (x-3) + 5$ ，則  $f(x)$  展開式中的各項係數和為\_\_\_\_\_
- 右圖為三次函數  $f(x)$  和一次函數  $g(x)$  的圖形，若  $f(x)$  和  $g(x)$  恰交於  $A$ 、 $B$  兩點， $A$  點坐標為  $(-1, 4)$ ， $B$  點坐標為  $(-3, -2)$ 。  
 $C(-2, 5)$  為  $f(x)$  函數圖形上的一個點，則  $f(x) =$  \_\_\_\_\_  
(請展開成一般式)
- 設  $f(x)$  為一多項式，若  $f(x)$  除以  $x^2 - 2x - 3$  的餘式為  $17x + 5$ ； $f(x)$  除以  $x^2 + 2x + 4$  的餘式為  $-x + 2$ 。試求  $f(x)$  除以  $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 4)$  的餘式的各項係數和為\_\_\_\_\_



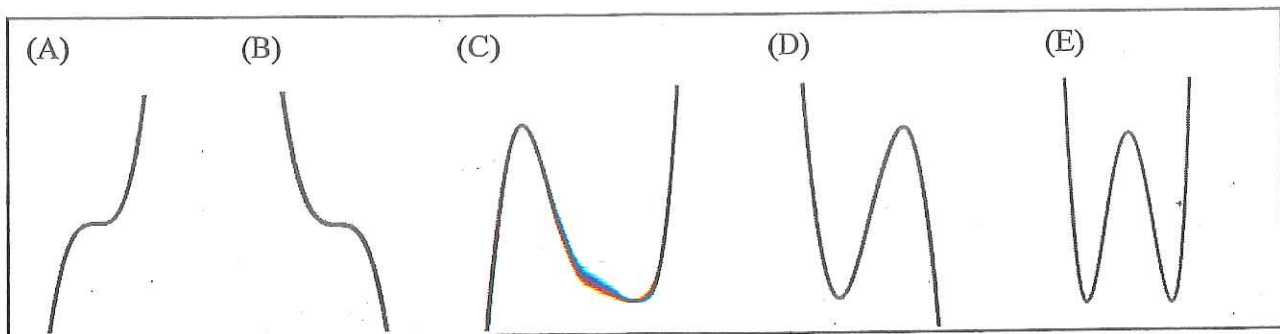
二、 計算混合題(共 32 分)(請在答案卷上詳述計算過程才給分)

1. 如何畫三次函數圖形(共 20 分)

小莫想要畫三次函數  $f(x)$  的圖形。她觀察畫三次函數圖形的大致長相時，需要：

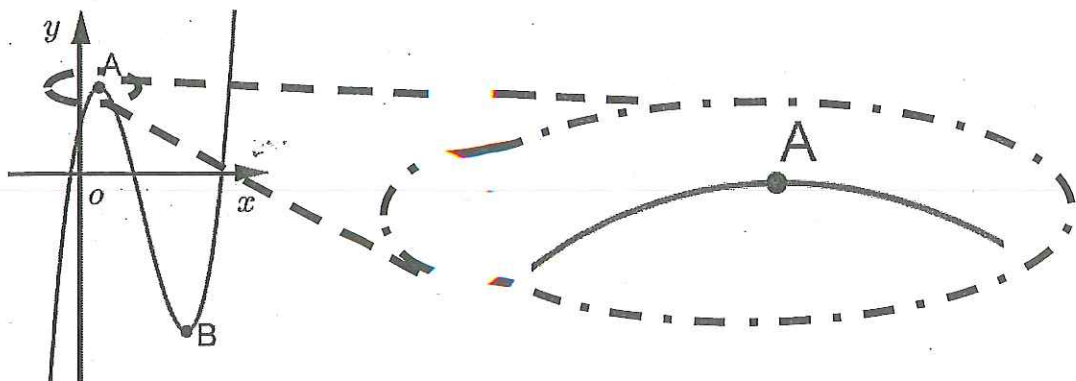
- (1) 先找出三次函數  $f(x)$  圖形的對稱中心(反曲點)。例如  $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 3$ ，可以整理成標準式，並得到  $f(x)$  函數圖形的(甲)標準式與對稱中心是\_\_\_\_\_。

(乙)  $f(x)$  的圖形會像是下列選項中的\_\_\_\_\_ (選擇題)。



- (2) 她利用數學軟體，畫出了  $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1$  的函數圖形，如下圖所示。她需要找到  $A$  點，即峰的相對極大值(比附近點的函數值都大)；以及  $B$  點，即谷的相對極小值(比附近點的函數值都小)。她想要利用  $g(x)$  上的點附近近似一次函數的性質，找到  $A$ 、 $B$  兩點
- 所以小莫假設三次函數上任意一點  $P$  的  $x$  座標為  $s$ ，可以整理成

$g(x) = a(x-s)^3 + b(x-s)^2 + c(x-s) + d$ ，其中在(丙)  $P$  點附近近似的一次函數  $h(x)$  為\_\_\_\_\_ (式子中若有出現  $a, b, c, d$  請用  $s$  表示，且函數不用展開)



小莫根據上圖中  $A$  點附近的局部放大圖，猜測在  $A$  點附近近似的一次函數應為水平線，對照  $g(x) = a(x-s)^3 + b(x-s)^2 + c(x-s) + d$ ，可以得到(丁)  $s =$ \_\_\_\_\_ (有兩解，分別為  $A$ 、 $B$  兩點的  $x$  座標)。

並且將  $s$  代回  $g(x) = a(x-s)^3 + b(x-s)^2 + c(x-s) + d$  之後，她發現(戊)因為\_\_\_\_\_，所以  $A$  點為峰的相對極大值。(Hint: 觀察  $h(x) - g(x)$  在  $x = s$  與  $x = s$  附近的數值，並詳述原因)，同樣道理，可以知道  $B$  點為谷的相對極小值。

所以由上(1)(2)所述，小莫就知道要如何畫出任何三次函數的大致長相了。

## 2. 商品販售計畫(共 12 分)

小琪想要販賣「武林帽 T」商品。假設購買人數為  $x$ ，售價為  $P(x)$ 、總成本為  $C(x)$ 、總營業額為  $TR(x)$ 。工廠根據小琪設計的圖樣，給她的「武林帽 T」的報價為開模 500 元，每製作一件帽 T 價格多 100 元。而小琪之前已經做過市場調查，預測一件「武林帽 T」售價  $P$  為 400 元時，沒有人會買。但是售價每降低 2 元，會多 1 個人購買。請試著幫她解決下列問題：

(1) 假如小琪希望獲得最高的總營業額  $TR(x)$ ，請問此時小琪(己)最高營業額為多少？

(2) 小琪在思考帽 T 售價  $P$  要訂多少的時候，會是最好的方案，她的想法如下：

(a) 小琪考慮當帽 T 的銷售量增加時，增加的成本量 (在此用  $MC(x)$  表示)。即當銷售量  $x = x_0$  時，可利用  $C(x)$  在  $x = x_0$  時的斜率來表示，會得到  $MC(x_0) = 100$ 。

(b) 小琪考慮當帽 T 的銷售量增加時，增加的收益量 (在此用  $MR(x)$  表示)。即當銷售量  $x = x_0$  時，可利用  $TR(x)$  在  $x = x_0$  時圖形近似一次函數的斜率來表示  $MR(x_0)$ 。試問當商品的銷售量為  $x_0$  時，(庚)  $MR(x_0)$  為多少？

(c) 因此當  $MR(x_0) = MC(x_0)$  時，銷售量增加時所增加的成本量和收益量達到了平衡。

而當  $x$  繼續增加時，會發現  $MR(x_0) < MC(x_0)$ ，所以再繼續生產反而會減少收益。試問此時(辛)達到平衡時的帽 T 售價為多少？

## 三、多重選擇題(每題 8 分，錯一個選項扣 3 分，扣至該題分完為止，共 32 分)

1. ( ) 設  $a, b$  為整數， $x^2 + x + b$  是  $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + ax^2 - 4x - 4$  的因式，若滿足不等式  $f(x) < 0$  的  $x$  範圍為  $c < x < d$ ，則下列何者正確？
- (A)  $a = 5$  (B)  $b = 2$  (C)  $c = -3$  (D)  $d = 1$  (E)  $a + c = b + d$

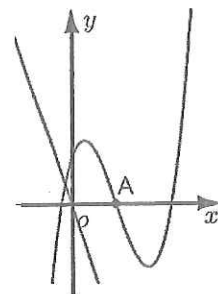
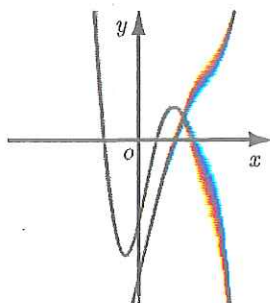
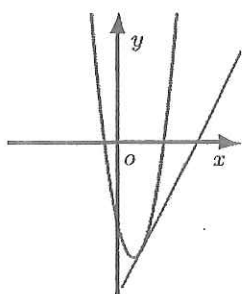
2. ( ) 試問下列函數與圖形的配對中，**那些一定是錯誤的**？

(A)  $f(x) = a(x-h)^2 + b(x-h) + k$  (B)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  (C)  $f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$

$g(x) = b(x-h) + k$  ,

$g(x) = cx + d$

$g(x) = px$  ,  $A$  為  $f(x)$  對稱中心

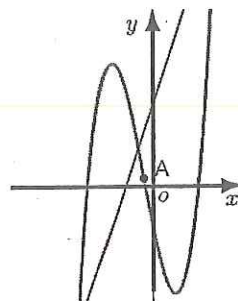
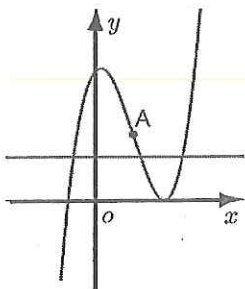


(D)  $f(x) = a(x-h)^3 + b(x-h)^2 + c(x-h) + d$

$g(x) = d$  ,  $A$  為  $f(x)$  對稱中心

(E)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g(x) = ax + b$  ,  $A$  為  $f(x)$  對稱中心



3. ( ) 關於不等式的解，下列何者**正確**？

(A)  $(x+3)^{2020}(2x+1) < (x+3)^{2020}(3x+5)$  和  $2x+1 < 3x+5$  有相同的解

(B)  $(x-3)(x-1)^2 \geq 0$  和  $x-3 \geq 0$  有相同的解

(C)  $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3 < 0$  和  $x^2(x+2)(x-3) < 0$  有相同的解

(D)  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0$  和  $(x+2)^2(x+1)(x^3+1) \geq 0$  有相同的解

(E)  $3x-2 \leq x-5 \leq 3-x$  和  $(2x+3)^3(x+3)^2 \leq 0$  有相同的解

4. ( ) 已知  $A$  點在三次函數  $f(x)$  上。其中  $f(x)$  在  $A$  點附近的一次近似函數為

$g(x) = 8x - 30$ ，且  $f(x)$  的對稱中心(反曲點)為  $M(2, 2)$ ，試選出正確的選項：

(A) 將  $A$  點對  $M$  點作對稱點  $B$ ，則  $B$  在  $y = f(x)$  的圖形上

(B) 過  $A$ 、 $M$  兩點的直線  $L_{AM}$ ，與  $y = f(x)$  的圖形有三個相異的交點

(C) 若  $A$  點的  $x$  坐標  $a$ ，則當  $k$  介在  $2$  和  $a$  之間時，可得  $f(k) > g(k)$

(D)  $f(x)$  的最高次項係數大於零

(E) 將  $g(x)$  左移四個單位後，可以得到新的函數圖形  $h(x)$ 。則  $h(x)$  也為  $f(x)$  上某一個點附近的一次近似函數

## 桃園市立武陵高中 108 學年度高一上學期期末考數學科試題卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

## 一、填充題(一格 6 分，共 36 分)

1. 13	2. -3	3. $-1 < x < 0$
4. -6	5. $4x^3 + 20x^2 + 31x + 19$	6. -6

## 二、計算混合題(請在答案卷上詳述計算過程才給分)

1. 如何畫三次函數圖形(共 20 分)

2. 商品販售計畫(共 12 分)

(甲)(5%) $f(x) = -4(x-1)^3 + 3(x-1) + 2$ 對稱中心 (1, 2)	(己)(4%) 20000 元
(乙)(2%) D	(庚)(5%) $MR(x_0) = 400 - 4x_0$
(丙)(6%) $(6s^2 - 14s + 4)(x-s) + (2s^3 - 7s^2 + 4s + 1)$	(辛)(3%) 75 元
(丁)(3%) $s = 1/3$ 或 2 (戊)(4%) $h(x) - g(x) = -2(x-1/3)^3 + 5(x-1/3)^2$ 在 $x = 1/3$ 附近，平方項影響比三次方項大，而且係數為正。所以 $g(1/3)$ 為相對極大值	

## 三、多重選擇題(一題 8 分，錯一個選項扣 3 分)

1. DE	2. BC
3. DE	4. ABCE