

## 武陵高中 107 學年度第二學期高二數學自然組第二次段考試題卷

範圍：第四冊 2-3 ~ 3-3 班級：\_\_\_ 座號：\_\_\_ 姓名：\_\_\_

一、多重選擇題：(20%，每題 10 分，每題至少有一個選項正確，全對得 10 分，錯 1 個選項得 7 分，錯 2 個選項得 4 分，錯 3 個選項以上得 1 分，未作答或錯 4 個選項以上得 0 分)

1. 設  $A$  為  $2 \times 2$  階方陣， $I$  為 2 階單位方陣， $O$  為  $2 \times 2$  階零矩陣，試問下列選項何者正確？

- (A)  $(A-I)(A+I) = (A+I)(A-I)$   
 (B) 若  $(A-I)(A+I) = O$ ，則  $A = I$  或  $A = -I$   
 (C) 若  $(A-I)(A+I) = O$ ，則  $A^{-1} = A$   
 (D) 若  $(A-I)(A+I) = O$ ，則  $\det(A) \neq 0$   
 (E) 若  $A$  為轉移矩陣，則  $A(A-I)(A+I)$  的所有元之和為 0

2. 三元一次聯立方程組  $\begin{cases} ax - 2y - 3z = -2 \\ x + by - 2z = -1 \\ 3x + y + cz = 4 \end{cases}$  利用增廣矩陣的列運算得到矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，試

問下列選項何者正確？

(A) 能滿足上述條件的  $a, b, c$  只有一種可能性

(B)  $\begin{vmatrix} a & -2 & -3 \\ 1 & b & -2 \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} \neq 0$  (C) 此方程組的解集合與方程組  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -4 \\ 2x + y - 2z = -6 \end{cases}$  的解集合完全相同

(D)  $\begin{cases} ax - 2y - 3z = 0 \\ x + by - 2z = 0 \\ 3x + y + cz = 0 \end{cases}$  有異於  $(0,0,0)$  的解 (E)  $\begin{vmatrix} a & -2 & -2 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & b & -2 \\ 4 & 1 & c \end{vmatrix}$

二、填充題：(56%，每格 7 分，未全對不予給分)

1. 若  $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ \_\_\_\_\_。

2. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ，已知  $XA + B = 2X$ ，試求矩陣  $X =$ \_\_\_\_\_。

3. 小武與小陵結婚後打算買房，兩人向父母借了一千萬無利息按年平均攤還，以小武與小陵兩人目前的年薪  $x$  萬元與  $y$  萬元計算，若兩人薪水的加總扣掉生活開銷每年 20 萬後所有的錢全部用來還款，則 8 年可將一千萬恰好還清。但又考慮到扶養一個小孩每年固定花費  $z$  萬元，若由小武一人的薪水全部用在還款與小孩花費上，小陵的薪水負責生活開銷及儲蓄，則 20 年才可將一千萬恰好還清。若由兩人年薪總和扣掉生活開銷每年 20 萬及小孩花費後所有的錢全部用來還款，則 10 年可將一千萬恰好還清。試求小武的年薪  $x$  為\_\_\_\_\_萬元。

4. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，若  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ，試求實數  $k =$ \_\_\_\_\_。

背面有題

5. 空間中，四平面  $E_1: x+y+z=1$ ， $E_2: y+z=1$ ， $E_3: x+2y+2z=2$ ， $E_4: x+2y+2z=3$  將空間切割成 \_\_\_\_\_ 個區域。

6. 設矩陣  $A = [a_{ij}]_{20 \times 15}$ ， $B = [b_{ij}]_{15 \times 10}$ ，且  $a_{ij} = \begin{cases} 1, i \leq j \\ 0, i > j \end{cases}$ ， $b_{ij} = i^2 + j$ ，令  $C = [c_{ij}] = AB$ ，試求

$$c_{10,7} = \text{_____}。$$

7. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 3 & k \end{bmatrix}$  滿足  $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求  $A^{100} = \text{_____}$ 。

8. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試求  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20} = \text{_____}$ 。

三、計算題：(24%，每題 12 分，請寫完整過程，否則不予計分)

1. 試就  $a$  值討論方程組 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + (a + 1)y + 2z = 3 \\ x + y + az = a \end{cases}$$
 的解 (請寫出完整的解)，並解釋其幾何意義。

2. 2 年奇異班是一個勤於打掃維護環境整潔的班級，而班上由 2 位女同學及 2 位男同學負責倒垃圾及廚餘的工作，老師將 4 人分為資源組 2 人負責倒垃圾，及食物組 2 人負責倒廚餘，為了讓大家都有機會接觸到不同的打掃工作，每到下一週的第一天，老師會從資源組 2 人及食物組 2 人中隨機各選 1 人交換組別。已知第一週資源組及食物組皆為 1 女 1 男，試求：
- (1) 第 4 週食物組恰為 2 位女同學的機率為何？(8 分)
  - (2) 在經過長期交換組別後，資源組恰為 2 位男同學的機率為何？(4 分)

背面有題

武陵高中 107 學年度第二學期高二數學自然組第二次段考試題卷

範圍：第四冊 2-3 ~ 3-3 班級：\_\_\_ 座號：\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、多重選擇題：(20%，每題 10 分，每題至少有一個選項正確，全對得 10 分，錯 1 個選項得 7 分，錯 2 個選項得 4 分，錯 3 個選項以上得 1 分，未作答或錯 4 個選項以上得 0 分)

1.	2.
----	----

二、填充題：(56%，每格 7 分，未全對不予給分)

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.

三、計算題：(24%，每題 12 分，請寫完整過程，否則不予計分)

1.	2.
----	----

武陵高中 107 學年度第二學期高二數學自然組第二次段考試題卷

範圍：第四冊 2-3 ~ 3-3 班級：\_\_\_ 座號：\_\_\_ 姓名：\_\_\_

一、多重選擇題：(20%，每題 10 分，每題至少有一個選項正確，全對得 10 分，錯 1 個選項得 7 分，錯 2 個選項得 4 分，錯 3 個選項以上得 1 分，未作答或錯 4 個選項以上得 0 分)

1. ACDE	2. ABE
---------	--------

二、填充題：(56%，每格 7 分，未全對不予給分)

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$	2. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$	3. 75	4. -2
5. 9	6. 997	7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$	8. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

三、計算題：(24%，每題 12 分，請寫完整過程，否則不予計分)

<p>1.</p> $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{bmatrix} \quad (4 \text{分})$ <p>(1) <math>a=1</math>，有無限多解 <math>(-1, t, 2-t)</math>，<math>t \in R</math> (2分)</p> $\text{代回得} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}, \text{幾何意義為}$ <p>兩平面重合，另一平面與兩重合平面交於一線。(1分)</p> <p>(2) <math>a=0</math>，無解。(1分)</p> $\text{代回得} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=3 \\ x+y=0 \end{cases}, \text{幾何意義為三平面}$ <p>兩兩交於一線，三線兩兩平行。(1分)</p> <p>(3) <math>a \neq 1</math> 且 <math>a \neq 0</math>，有唯一解 <math>(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 1)</math> (2分)</p> <p>幾何意義為三平面交於一點。(1分)</p>	<p>2. (1)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: left;">狀態</td> <td style="text-align: left;">資源</td> <td style="text-align: left;">食物</td> <td style="text-align: left;">轉移矩陣為</td> </tr> <tr> <td>S1</td> <td>男男</td> <td>女女</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;"><math>M = \begin{bmatrix} 0 &amp; 1/4 &amp; 0 \\ 1 &amp; 1/2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1/4 &amp; 0 \end{bmatrix}</math></td> </tr> <tr> <td>S2</td> <td>女男</td> <td>女男</td> </tr> <tr> <td>S3</td> <td>女女</td> <td>男男</td> </tr> </table> <p>(2分) (2分)</p> $\text{令 } X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = MX_1 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix},$ $X_3 = MX_2 = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/4 \\ 1/8 \end{bmatrix}, X_4 = MX_3 = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 5/8 \\ 3/16 \end{bmatrix},$ <p>所求為 <math>\frac{3}{16}</math>。(每個 <math>X</math> 各 1 分，若所求錯扣 1 分)</p> <p>(2) 設穩定狀態 <math>\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}</math>，由 <math>M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}</math> 得</p> $\begin{cases} \frac{1}{4}y = x = z \\ x + \frac{1}{2}y + z = y \end{cases}, (2 \text{分})$ <p>又 <math>x+y+z=1</math> (1分)，解得 <math>x = \frac{1}{6}</math> (1分)</p>	狀態	資源	食物	轉移矩陣為	S1	男男	女女	$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$	S2	女男	女男	S3	女女	男男
狀態	資源	食物	轉移矩陣為												
S1	男男	女女	$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$												
S2	女男	女男													
S3	女女	男男													