

## 桃園市立武陵高級中學 107 學年度第二學期第一次期中考高三社會組數學科試題

一.多選題(共 20 分,每題全對得 10 分,錯一個選項得 6 分,錯二個選項得 2 分)

1.下列各敘述何者正確?

(1)數列  $a_n = (-1)^n$  的極限值是 1 或 -1(2)數列  $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  的極限不存在(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n} = 1$ (4)若對一切自然數  $n$  恆有  $c_n \geq b_n \geq a_n$ , 且  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$  兩數列均為收斂數列, 則數列  $\langle b_n \rangle$  收斂(5)若  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  均發散數列, 則  $\langle a_n \times b_n \rangle$  有可能為收斂數列.

2.下列選項哪些是正確的?

(1)  $(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \dots = \frac{1}{1}$

(2)  $(\frac{2}{1} - \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} - \frac{4}{3}) + (\frac{4}{3} - \frac{5}{4}) + \dots + (\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}) + \dots = \frac{2}{1}$

(3)  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + (\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(4)  $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + (-2)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - (-2)}$

(5)無窮級數  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{30} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^n + \dots$  是收斂的級數.

二.填充題(共 70 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	10	20	30	38	46	54	60	65	70

1. 數列  $\langle (x+2) \cdot (2x-1)^n \rangle$  收斂, 試求實數  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_.2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = a$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = b$ , 則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_.3.  $0.\bar{6} + 0.0\bar{6} + 0.00\bar{6} + \dots$  無窮級數之和為\_\_\_\_\_.

4. 已知  $a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}$ , 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$  \_\_\_\_\_ .

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \right) =$  \_\_\_\_\_ .

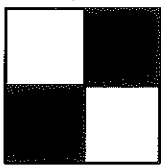
6. 已知無窮級數  $(2-3x) + (2-3x)^2 + \cdots + (2-3x)^n + \cdots$  的和為  $2x$ , 則實數  $x$  的值为 \_\_\_\_\_ .

7. 已知  $a, b \in R$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n+1} - an + b \right) = 2$ , 試求  $a+b$  的值为 \_\_\_\_\_ .

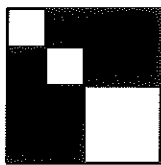
8. 設等比數列  $\langle a_n \rangle$  的公比  $r = -\frac{1}{3}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = 9$ , 求  $a_1 =$  \_\_\_\_\_ .

9. 設一正方形的邊長為 1, 先將其等分成 4 個相同的小正方形, 並將右上角和左下角的二個正方形塗成黑色, 如圖(一); 再將圖(一)中左上角的正方形等分成 4 個相同的更小正方形, 並將右上角和左下角的二個更小的正方形塗成黑色, 如圖(二), 依照這樣的規律作成圖(三)、圖(四)、...、圖(k)、... . 設  $A_k$  是圖(k)中黑色區域的面積,  $B_k$  是圖(k)中白色區域的面積, 則

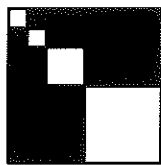
$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{A_k}{B_k} \right) =$  \_\_\_\_\_ .



圖(一)



圖(二)



圖(三)

三. 計算題(共 10 分)

1. 設  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \cdots + (-1)^{n-1} \left( \frac{2}{3} \right)^n + \cdots$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ , 試求:

(1)  $S_n = ?$  (2 分)

(2)  $S = ?$  (3 分)

(3) 滿足  $|S - S_n| < \frac{1}{100}$  的最小自然數  $n$  為何? (5 分)

桃園市立武陵高級中學 107 學年度第二學期第一次期中考高三社會組數學科答案卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一.多選題(共 20 分，每題全對得 10 分，錯一個選項得 6 分，錯二個選項得 2 分)

1.	2.

二.填充題(共 70 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	10	20	30	38	46	54	60	65	70

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

三.計算題(共 10 分)

桃園市立武陵高級中學 107 學年度第二學期第一次期中考高三社會組數學科答案卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一.多選題(共 20 分，每題全對得 10 分，錯一個選項得 6 分，錯二個選項得 2 分)

1.	2.
(3)(5)	(1)(3)(5)

二.填充題(共 70 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	10	20	30	38	46	54	60	65	70

1.	2.	3.
$x = -2$ 或 $0 < x \leq 1$	$(0, \frac{3}{2})$	$\frac{20}{27}$
4.	5.	6.
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$
7.	8.	9.
4	8	2

三.計算題(共 10 分)

(1)  $S_n = \frac{\frac{2}{3}[1 - (-\frac{2}{3})^n]}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{2}{5}[1 - (-\frac{2}{3})^n]$  (2 分)

(2)  $S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{2}{5}$  (3 分)

(3)  $|S - S_n| = \left| \frac{2}{5} - \frac{2}{5}[1 - (-\frac{2}{3})^n] \right| = \frac{2}{5}(\frac{2}{3})^n < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow (\frac{2}{3})^n < \frac{1}{40}$  (2 分)

$\Rightarrow n(\log 2 - \log 3) < -\log 40$

$\Rightarrow n > \frac{\log 40}{\log 3 - \log 2}$

$\Rightarrow n > \frac{1.6020}{0.1761}$  (2 分)

$\Rightarrow n \geq 10$  (1 分)