302, 304~315

市立武陵高中 107 學年度下高三自然組數學科第一次期中考　試題卷

範圍：數甲下 1-1～2-1　　　　三年＿＿班＿＿號　姓名：＿＿＿＿＿＿

※ 注意：
1. 本卷配分共 110 分。若得分超過 100 分，以 100 分計算。
2. 已知對於任意正整數 k，以下性質成立：
   若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$；若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to c}f(x)}$
3. 求極限值時，若極限存在請寫出答案，若極限不存在請寫不存在

一、多選題（共 16 分，每題 8 分。答錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得 0 分。）

1. 若 $\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$，$\langle c_n \rangle$ 為三數列，則下列敘述何者正確？

   (A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 亦存在

   (B) 若 $\langle a_n \rangle$ 各項均為正數，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 為正數

   (C) 若 $n\geq 100$ 時，$a_n\leqq b_n\leqq c_n$ 恆成立且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 、 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 皆存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 亦存在

   (D) 若 $\langle a_n \rangle=\left\langle\left(\dfrac{-3}{\pi}\right)^n\right\rangle$，則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂

   (E) 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，令 $c_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，則 $\langle c_n \rangle$ 收斂

2. 下列哪些選項是正確的？

   (A) 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則函數 $f_1(x)=a^{|x|}$ 的定義域為任意實數

   (B) 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則函數 $f_2(x)=\log_a|x|$ 的定義域為任意實數

   (C) 函數 $f_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+15}}$ 的定義域為任意實數

   (D) 函數 $f_4(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-10}$ 對任意的實數 x，皆可以微分

   (E) 函數 $f_5(x)=|x+1|+|x-4|$ 對任意的實數 x，皆可以微分

二、填充題（共 76 分。第 I 部分，每格 4 分；第 II 部分，每格 6 分。）

第 I 部分（每格 4 分）：

1. 試計算下列各題之值：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^{1550}}{3n^{108}+26n+1440}-10^{2019}\right)=$________.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2^{2n}+3^{n+1}}{7^n}\right)=$________.

(3) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{[2x]}{|3x-1|}=$________.（[ ]表示高斯符號）

(4) 設函數 $f(x)=3x-2$，$g(x)=x^2-x+2$，則 $(g\circ f)(3)-(f\circ g)(3)=$________.

第 II 部分（每格 6 分）：

2. 在坐標平面上，今有一台機器人由原點出發，先朝西方走 5 單位，再朝北方走 8 單位，到達點 $P_1(x_1,y_1)$；接著從 P_1 出發，先朝西方走 $\dfrac{5}{2}$ 單位，再朝北方走 $\dfrac{8}{3}$ 單位，到達點 $P_2(x_2,y_2)$；依此類推，機器人每次先朝西方走，移動的距離為前一次朝西方行走距離的 $\dfrac{1}{2}$ 倍；再朝北方走，移動的距離為前一次朝北方行走距離的 $\dfrac{1}{3}$ 倍。依序到達點 P_1、P_2、P_3、…、P_n、…，設 $\lim_{n\to\infty}P_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\text{ , }\lim_{n\to\infty}y_n\right)$，試求 $\lim_{n\to\infty}P_n=$________.

背面有題

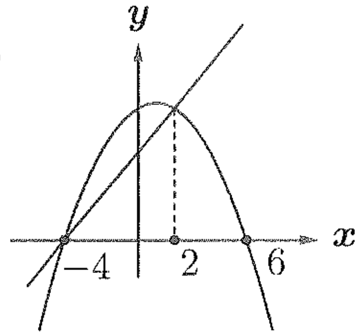
3. 設 $g(x)=\left[(2x+3)^{10}+x^2\right]^5$，則 $g'(-1)=$________.

4. $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}\right)=$________.

5. 設 a, b, c 為實數，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b\sqrt{x^2+7}-c}{x-3}=2$ 且 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ax^2+b\sqrt{x^2+7}-c}{x-3}$ 存在，則 $a+b+c=$________.

6. 設 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)}=\sqrt{1\times 3}+\sqrt{2\times 4}+\sqrt{3\times 5}+\cdots+\sqrt{n\times(n+2)}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{2n^2}=$________.

7. 若平面上二次函數 $y=f(x)$ 及一次函數 $y=g(x)$ 的圖形如右圖所示，則 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$________.



8. 設 a, b 為實數，已知函數 $f(x)=\begin{cases}(3x^2-2x-a)(x^3-5x) & ,\ x\geq 2\\ ax^3+2bx^2 & ,\ x<2\end{cases}$ 的一階導函數為連續函數，

試求數對 $(a,b)=$________.

9. 設函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 對任意正實數 x, y 滿足：$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$，且 f 是連續函數，試問：

(1) 若 $f(2)=\dfrac{14}{3}$，則 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=$________.

(2) 若 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=2$，則 $f'(x)=$________.

10. 設函數 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2+\cos^n(2x)\right)$，試問在 $0\le x\le 6\pi$ 的範圍中，使得 $f(x)$ 不連續的所有 x 值之總和為_________.

三、計算證明題（請詳列演算過程，否則不予計分，共 18 分。）

1. 已知五次多項式函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 處的切線方程式為 $5x+2y=7$，在 $x=3$ 處的切線方程式為 $4x-y=6$。試證至少存在一點 $A\left(a,f\left(a\right)\right)$ 在 $f(x)$ 的圖形上，且過 A 點的切線斜率為 3。(6 分)

2. 已知 x 為正實數，設函數 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$：

(1) 試證明其一階導函數為 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$。(5 分)

(2) 試求過點 $P(-4,1)$ 且與曲線 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 相切的切線方程式及切點坐標。(7 分)

背面有題

市立武陵高中 107 學年度上高三自然組數學科第一次期中考 答案卷

範圍：數甲下 1-1～2-1　　　　　三年_____班_____號　姓名：_______________

◎ 注意：本卷配分共 110 分。若得分超過 100 分，以 100 分計算。

一、多選題（共 16 分，每題 8 分。答錯一個選項得 5 分、錯兩個選項得 2 分、錯三個以上或未作答得 0 分）

1.		2.	

二、填充題（共 76 分。第 I 部分，每格 4 分；第 II 部分，每格 6 分。）

第 I 部分（每格 4 分）：

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)

第 II 部分（每格 6 分）：

2.	3.	4.	5.	6.
7.	8.	9.(1)	9.(2)	10.

三、計算證明題（請詳列演算過程，否則不予計分，共 18 分。）

市立武陵高中 107 學年度上高三自然組數學科第一次期中考 答案卷

範圍：數甲下 1-1～2-1　　　三年_____班_____號　姓名：________________

◎ 注意：本卷配分共 110 分。若得分超過 100 分，以 100 分計算。

一、多選題（共 16 分，每題 8 分。答錯一個選項得 5 分、錯兩個選項得 2 分、錯三個以上或未作答得 0 分）

1.	DE	2.	AC

二、填充題（共 76 分。第 I 部分，每格 4 分；第 II 部分，每格 6 分。）

第 I 部分（每格 4 分）：

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)
不存在	$\frac{43}{12}$	0	22

第 II 部分（每格 6 分）：

2.	3.	4.	5.	6.
$(-10,12)$	1440	不存在	10	$\frac{1}{4}$
7.	**8.**	**9.(1)**	**9.(2)**	**10.**
$\frac{5}{2}$	$(4,-5)$	$\frac{13}{24}$	$2+x^2$	39π

三、計算證明題（請詳列演算過程，否則不予計分，共 18 分。）

1.

因為 $f(x)$ 是多項式函數，故定義域是所有實數且 $f(x)$ 是連續函數

$\Rightarrow f'(x)$ 是四次多項式，亦為連續函數

$\Rightarrow f'(x)$ 在 $[1,3]$ 連續　(2分)

又由題意可知 $f'(1)=-\frac{5}{2}$，$f'(3)=4$

所以 $f'(1)<3<f'(3)$　(2分)

故由中間值定理可知，

存在一數 $a\in(1,3)$ 使得 $f'(a)=3$

取點 $A(a,f(a))$ 即為所求.　(2分)

2.(1) 任取定義域中的一點 a，則

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$$ → 定義式 (2分)

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3}a^{\frac{-2}{3}}$$

故可得 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$　正確 (3分)

(2) 設切點為 $A(a,f(a))$，則切線斜率 → 1分

$f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}-1}{a+4}$，令 $t=\sqrt[3]{a}$

$\Rightarrow (t-2)(2t^2+t+2)=0 \Rightarrow t=2$　解 t (2分)

$\Rightarrow a=8$，故切點為 $A(8,2)$　(2分)

切線為 $x-12y+16=0.$　(2分)