

# 武陵高中 107 學年度上學期高二自然組第二次期中考數學科題目卷

## 範圍：Book3 Ch.2

### 一、多選題(1 題 8 分，共 24 分)

(錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分)

1. 下列何者的圖形為一圓？

(1)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$

(2)  $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$

(3)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

(4)  $(x + 2)(x - 4) + (y - 1)(y + 5) = 0$

(5)  $\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = -1 + 5\sin\theta \end{cases}, 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

2. 右圖為三直線  $x - y - 1 = 0$ ， $2x + y + 2 = 0$ ，

與  $x - 3y + 1 = 0$  的圖形，則下列何者正確？

(1)  $L_3$  的方程式為  $x - y - 1 = 0$

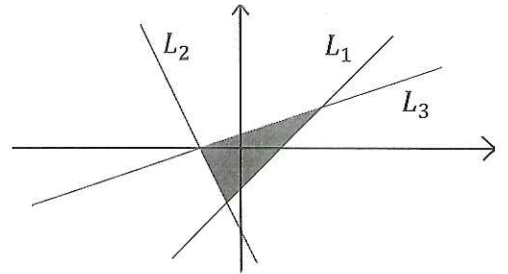
(2) 三角形區域(含邊界)可用  $x - y - 1 \geq 0$ ， $2x + y + 2 \geq 0$ ，

與  $x - 3y + 1 \geq 0$  表示

(3) 三角形區域(含邊界)共有 4 個格子點

(4)  $x - 2y$  最大值為 0

(5)  $x - 2y$  最小值為 -1



3. 設  $A(0,0)$ ， $B(5,0)$ ，已知  $P(x,y)$  為平面上滿足  $\overline{PA} = k\overline{PB}$  的動點，其中  $k$  為正實數，

下列敘述何者正確？

(1)  $P$  點所成軌跡圖形為一圓

(2) 若  $k \neq 1$ ，則點  $B$  在  $P$  點所成軌跡圖形的內部

(3) 在  $x$  軸上，滿足  $\overline{PA} = k\overline{PB}$  的圖形為兩相異點

(4) 若  $x$  軸上恰有兩相異點  $C, D$  滿足  $\overline{PA} = k\overline{PB}$ ，則  $P$  點所成軌跡為以  $\overline{CD}$  為直徑的圓

(5) 若  $x$  軸上恰有兩相異點  $C, D$  滿足  $\overline{PA} = k\overline{PB}$ ，則  $P$  點所成軌跡為以點  $A$  或點  $B$  為圓心的圓

二、填充題(1 格 6 分，共 60 分)

1. 已知一個圓的圓心為點 $(2, -3)$ ，且其中一條直徑的兩個端點恰好在兩座標軸上，則此圓的圓方程為 \_\_\_\_\_。
2. 已知直線  $ax + y + 2 = 0$  與  $A(-2,3)$ ， $B(3,2)$  所形成的線段相交，試求實數  $a$  的範圍為 \_\_\_\_\_。
3. 已知  $\triangle ABC$  的三頂點為  $A(-1,4)$ ， $B(3,2)$ ， $C(1,5)$ ，試求  $\triangle ABC$  的垂心為 \_\_\_\_\_。
4. 若直線  $\sqrt{2}x - y + k = 0$  與圓  $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$  相切，則實數  $k =$  \_\_\_\_\_。
5. 過點  $P(1,2)$  作圓  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$  的兩條切線，切點分別為  $A$ 、 $B$ ，試求
  - (1)  $\triangle PAB$  的外接圓面積為 \_\_\_\_\_。
  - (2) 弦  $AB$  所在直線方程式為 \_\_\_\_\_。
6. 已知實數  $x, y$   
滿足聯立不等式  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2y \geq 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$ ，則  $\frac{y}{x+1}$  的最大值為 \_\_\_\_\_。
7. 設  $x, y$  滿足  $x^2 + y^2 = 1$ ，且  $m$  為實數，則  $(2\sqrt{2} - m - x)^2 + (2\sqrt{2} + m - y)^2$  的最小值為 \_\_\_\_\_。
8. 已知實數  $a \neq 0$ ，圓  $C$  的圓心為  $A(a, \frac{2}{a})$  且原點  $O$  為圓上一點，當直線  $2x + y = 4$  與圓  $C$  交於點  $M, N$ ，且  $\overline{OM} = \overline{ON}$ ，則圓  $C$  的方程式為 \_\_\_\_\_。

9. 若圓  $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 10 = 0$  上至少有三個不同的點到直線  $L : ax + by = 0$  的距離為  $2\sqrt{2}$ ，則直線  $L$  的斜率最大值為 \_\_\_\_\_。

三、計算證明題(1 題 8 分，共 16 分)(請詳列計算過程，否則不予計分)

1. 一光線從點  $A(-1,3)$  射出，經  $y = 2x$  反射後抵達點  $B(5,12)$ ，試問：

- (1) 該光線從  $A$  到  $B$  的路徑長度為？  
(2) 反射後的路徑在一直線上，求此直線方程式為？

2. 奇異果飲料店根據需求，一天中要購買蜂蜜至少 4 百克，檸檬至少 6 公斤，其中蜂蜜每 1 百克的價格為 30 元，檸檬每 1 公斤的價格為 20 元，而且一天中購買蜂蜜、檸檬的總費用不能超過 600 元。如今，若一天購買蜂蜜  $x$  百克，檸檬  $y$  公斤

- (1) 寫出滿足題意的聯立不等式，並畫出可行解區域。(2 分，2 分)  
(2) 若蜂蜜、檸檬經調配後可全部賣出，蜂蜜每 1 百克的利潤為 10 元，檸檬每 1 公斤的利潤為 20 元，奇異果飲料店應採購蜂蜜幾百克及檸檬幾公斤才能使得利潤最大，最大利潤為多少元？  
(1 分，1 分，2 分)

背面有題

武陵高中 107 學年度上學期高二自然組第二次期中考數學科答案卷

範圍：Book3 Ch.2

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、多選題(1 題 8 分，共 24 分)

(錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分)

1.	2.	3.
----	----	----

二、填充題(1 格 6 分，共 60 分)

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.		

三、計算證明題(1 題 8 分，共 16 分)(請詳列計算過程，否則不予計分)

1.	2.
----	----

武陵高中 107 學年度上學期高二自然組第二次期中考數學科解答

範圍：Book3 Ch.2

一、多選題(1 題 8 分，共 24 分)

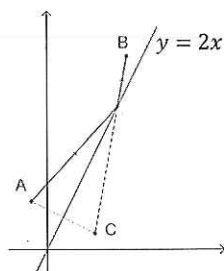
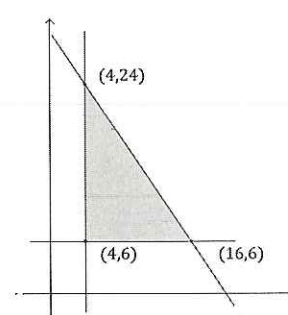
(錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分)

1.	245	2.	5	3.	4
----	-----	----	---	----	---

二、填充題(1 格 6 分，共 60 分)

1. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$	2. $a \geq \frac{5}{2}, a \leq -\frac{4}{3}$	3. $(\frac{5}{4}, \frac{11}{2})$	4. $-\sqrt{2} \pm 3$
5.(1) $\frac{5\pi}{2}$	5.(2) $x - 3y + 4 = 0$	6. 9	7. 4
8. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$	9. $\sqrt{3} - 2$	X	

三、計算證明題(1 題 8 分，共 16 分)(請詳列計算過程，否則不予計分)

<p>1. Ans : (1) <math>5\sqrt{5}</math> (2) <math>11x - 2y = 31</math></p> <p>(1) 令 A 對 <math>y = 2x</math> 的對稱點為 <math>C(a, b)</math>，直線 AC 斜率為 <math>-\frac{1}{2}</math>，直線 AC: <math>x + 2y = -7</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{cases} y = 2x \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}</math> </div>  </div> <p><math>\therefore \frac{-1+a}{2} = 1, \frac{3+b}{2} = 2</math></p> <p><math>\Rightarrow C(3, 1)</math> (2 分)</p> <p><math>\therefore</math> 路徑長度為 BC 線段長 <math>= 5\sqrt{5}</math> (2 分)</p> <p>(2) 反射路徑即為直線 BC: <math>11x - 2y = 31</math> (4 分)</p>	<p>2. Ans : (2) 4 百克，24 公斤，520 元</p> <p>(1)</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 6 \\ 30x + 20y \geq 600 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})</math> </div>  </div> <p style="text-align: center;">可行解區域圖形(2 分)</p> <p>(2) 目標函數為 <math>f(x, y) = 10x + 20y</math>      在 <math>(4, 24)</math> 時有最大值 520      即蜂蜜 4 百克，檸檬 24 公斤，(2 分)      有最大利潤 520 元。(2 分)</p>
---	---