

武陵高中 106 學年度第二學期數學科高二(社會組)第三次期中考試題

範圍:第四冊 第四章二次曲線 3-3 反矩陣

一、多選題:16%(每題8分,錯1選項得5分,錯2選項得2分,錯3選項以上得0分)

1 設  $A, B, C$  均為二階方陣且  $I$  為二階單位方陣,  $O$  為二階零矩陣,  $\det A \neq 0$ , 則下列敘述何者正確?

- (A) 若  $AB=O$ , 則  $B=O$   
 (B)  $AB=AC$ , 則  $B=C$   
 (C) 若  $\det A, \det B$  皆不為 0, 且  $AXB=C$ , 則  $X=A^{-1}CB^{-1}$   
 (D)  $\det(2A)=2\det A$   
 (E) 若  $\det A, \det B$  皆不為 0, 則  $(BAB^{-1})^{-1}=B^{-1}A^{-1}B$

2. 下列方程式圖形何者為拋物線?

- (A)  $25(x^2+y^2)=(3x+4y-12)^2$   
 (B)  $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$   
 (C)  $(x+1)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+2(y+1)^2$   
 (D)  $y^2+5x-4y-1=0$   
 (E)  $\sqrt{x^2+y^2}=|3x-5|$

二. 填充題:67%(共67分) 答對格數配分如下

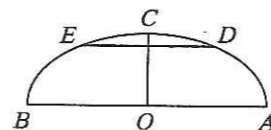
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 10 | 19 | 27 | 34 | 41 | 47 | 53 | 58 | 63 | 67 |

1. 若矩陣  $X$  為  $2 \times 2$  階的矩陣, 且滿足  $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ , 試求  $X =$  \_\_\_\_\_

2. 若  $A = \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ , 且  $A^{-1} = \frac{1}{3}A$ , 試求矩陣  $A =$  \_\_\_\_\_ (有兩解)

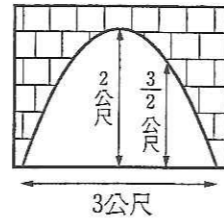
3. 已知一橢圓的兩焦點為  $F_1(1, 2), F_2(1, -4)$ , 弦  $\overline{AB}$  過點  $F_1$ ,  $\triangle ABF_2$  的周長為 20, 試求此橢圓的方程式 \_\_\_\_\_

4. 如下圖, 有一體育館是半橢圓形的建築, 長  $\overline{AB}$  是 40 公尺, 高  $\overline{OC}$  是 12 公尺 ( $O$  是橢圓中心), 內有一橫樑  $\overline{DE}$  長 20 公尺, 試問此橫樑離地面的高度 \_\_\_\_\_

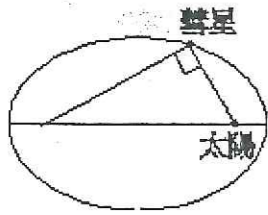


5. 雙曲線  $\Gamma$  貫軸的一頂點為  $(4, 2)$ , 共軛軸的一端點為  $(3, 6)$ , 且貫軸平行於  $y$  軸, 試求雙曲線  $\Gamma$  方程式 \_\_\_\_\_。

5. 右圖為一拋物線造型的拱門，其拱高為 2 公尺，寬為 3 公尺，試問離地面  $\frac{3}{2}$  公尺的地方，拱門寬度是\_\_\_\_\_。

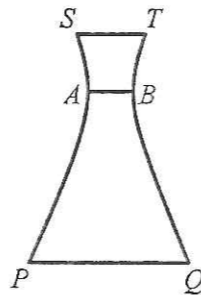


7. 某彗星繞著以太陽為一焦點的橢圓軌道運行，此彗星到太陽的最短距離約是 1AU (AU 為天文單位)，此彗星到太陽的最遠距離約是 9AU，則當此彗星與橢圓軌道兩焦點的連線成  $90^\circ$  夾角時，此彗星與太陽距離應為\_\_\_\_\_ (有兩解)



8. 雙曲線  $\Gamma$  的兩漸近線為  $x-3y+5=0$  與  $x+3y-1=0$  且有一頂點為  $(4,1)$ ，則  $\Gamma$  的焦點坐標為\_\_\_\_\_。

9. 右圖是某冷卻塔的截面圖，其頸部  $AB$  剛好是雙曲線的貫軸。已知  $\overline{AB}$ ， $\overline{ST}$  與  $\overline{PQ}$  互相平行， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{ST}=12$ ， $\overline{PQ}=40$ ，且  $\overline{AB}$  與  $\overline{ST}$  相距 5，求  $\overline{AB}$  與  $\overline{PQ}$  的距離為\_\_\_\_\_。



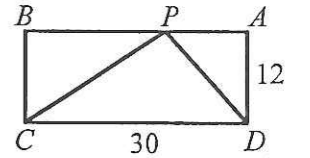
10. 已知  $c$  為實數且拋物線  $y^2-4cx+4cy+4c^2+16c=0$  之準線為  $x=6$ ，試求拋物線焦點座標\_\_\_\_\_。

三. 計算證明題：17% (需要完整過程，否則不計分)

1. 如圖為長 30，寬 12 的長方形  $ABCD$ ， $P$  為  $\overline{AB}$  上一點。已知  $\overline{CP}$  比  $\overline{DP}$  多 6，

(1) 令  $C(-15,0), D(15,0)$ ，求以  $C, D$  為焦點，且通過  $P$  的雙曲線方程式 (4%)

(2) 求  $\overline{BP}$  長 (4%)



2. 有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點  $F_1, F_2$ ，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設  $P$  為此橢圓與雙曲線的一個交點，且  $\overline{F_1F_2}=12$

(1) 若雙曲線的貫軸長為  $2k$ ，求橢圓的長軸長 (以  $k$  表示) (3%)

(2) 求  $\overline{PF_1} \times \overline{PF_2}$  (6%)

武陵高中 106 學年度第二學期數學科高二(社會組)第三次期中考答案卷

一、多選題 16%(每題 8 分，錯 1 選項得 5 分，錯 2 選項得 2 分，錯 3 選項以上得 0 分)

|   |    |   |     |
|---|----|---|-----|
| 1 | BC | 2 | ACD |
|---|----|---|-----|

二年\_\_班 座號\_\_ 姓名\_\_

二. 填充題：67%

答對格數配分如下

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 10 | 19 | 27 | 34 | 41 | 47 | 53 | 58 | 63 | 67 |

|                                                          |                                                                                                              |                                                     |                    |                                                    |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------|
| 1.<br>$\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ | 2.<br>$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ | 3.<br>$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ | 4.<br>$6\sqrt{3}$  | 5.<br>$\frac{(y-6)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{1} = 1$ |
| 6.<br>$\frac{3}{2}$                                      | 7.<br>$5 \pm \sqrt{7}$                                                                                       | 8.<br>$(-2 \pm 2\sqrt{10}, 1)$                      | 9.<br>$4\sqrt{30}$ | 10.<br>$(2, 4)$                                    |

三. 計算證明題：17%(需要完整過程，否則不計分)

1.  $c=15, a=3$  (1%)

$b^2 = c^2 - a^2 = 216$  (1%)

$\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{216} = 1$  (2%)

$15 + \sqrt{3}$  (4%)

2.

(1)  $2\sqrt{36+k^2}$

(2)  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2\sqrt{36+k^2}$  (P 在橢圓上)

$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2k$  (P 在雙曲線上)

$4\overline{PF_1} \times \overline{PF_2} = (\overline{PF_1} + \overline{PF_2})^2 - (\overline{PF_1} - \overline{PF_2})^2 = 144$

$\overline{PF_1} \times \overline{PF_2} = 36$