

市立武陵高中 110 學年度第一學期高三數乙第一次期中考試題

一、多重選擇題(每題 8 分，共 16 分，錯一個得 5 分、錯兩個得 2 分，其他不給分)

1. 下列哪些選項是正確的? _____

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{3})^n = 0$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{3}(-1)^n) = 0$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{4^n - 1} = 0$

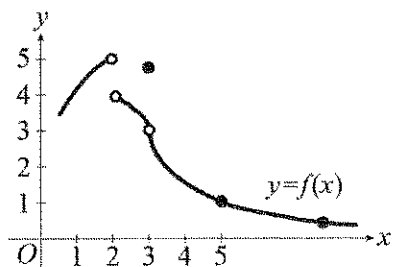
(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 n + \sin^2 n)$ 不存在 (E) $\sum_{i=1}^5 i = 15$

2. 設 $f(x)$ 之圖形如圖，則下列哪些正確? _____

(A) $f(2)$ 不存在 (B) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 不存在

(C) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ (D) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x} = \frac{5}{3}$

(E) $f(x)$ 在 $x = 5$ 處連續



二、填充題(每格 5 分，共 70 分)

1. 求下列各極限值(若無極限值，答案請寫“不存在”)

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{1}{n} + 6)(\frac{n+2}{2n+1} - 1)) =$ _____ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 + x + 3} =$ _____

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$ _____ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^2 + x - 2} - \frac{x}{x - 1} \right) =$ _____

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{2^n + 3^n} =$ _____

2. 一無窮等比級數的首項 $a_1 = 0.2$ ，第二項 $a_2 = 0.04$ ，則此級數的和為 _____

3. 若函數 $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{當 } x > 9 \\ x^2 - |x|, & \text{當 } -9 \leq x \leq 9 \\ x-4, & \text{當 } x < -9 \end{cases}$ ，則 $f(f(5)) =$ _____

4. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n ， $a_n \leq b_n \leq a_{n+1}$ 均成立。

若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =$ _____

5. 設 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ ，求函數 $f(x)$ 的

(a) 定義域為 _____

(b) 值域為 _____

6. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = 2$ ，則數對 $(a, b) =$ _____

7. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{當 } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{當 } 1 < x \leq 2 \\ 3x + 5, & \text{當 } x > 2 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在實數上為連續函數，

求數對 $(a, b) =$ _____

8. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 2$ 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 3$ ，

則 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ _____

9. 設 $\{a_n\}$ 為一等差數列。已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 186$ ， $a_3 + a_7 = 110$ 。令 $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} =$ _____

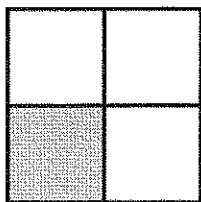
三、計算證明題(8分、6分，共14分)

1. 有一個面積為 32 的正方形，依以下的步驟將其分割著色。

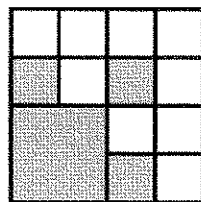
第 1 步驟：將其等分成 4 個小正方形，並將左下角的正方形塗上黑色，如第 1 圖所示

第 2 步驟：將剩下 3 個正方形再分別等分成 4 個更小的正方形，並將左下角的正方形塗上黑色，如第 2 圖所示

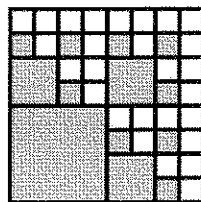
依照這樣的規律繼續分割著色下去，並設 S_n 表示在第 n 步驟後所有黑色正方形的總面積。



第1圖



第2圖



第3圖

(1) 求 S_1, S_2, S_3 的值(3分)

(2) 求無窮多個黑色正方形的面積總和(即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$)(5分，無計算過程不給分)

2. 已知 $f(x) = (x-16)^2(x-17)^2 + 3x$ ，求證：至少有一實數 c ，使得 $f(c) = 50$ 。(6分)

市立武陵高中 110 學年度第一學期高三數乙第一次期中考答案卷

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

一、多重選擇題(每題 8 分，共 16 分，錯一個得 5 分、錯兩個得 2 分，其他不給分)

1. AC	2. ABE
-------	--------

二、填充題(每格 5 分，共 70 分)

1. (a) -3	1. (b) $\frac{15}{13}$	1. (c) 27	1. (d) $-\frac{4}{3}$
1. (e) $\frac{3}{2}$	2. $\frac{5}{18}$	3. 45	4. 4
5. (a) $\{x x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -5\}$	5. (b) $\{y y \geq 0\}$		
6. (2, -3)	7. (8, -5)	8. 8	9. $-\frac{7}{2}$

三、計算證明題(8 分、6 分，共 14 分)

1. (1) $S_1 = 8$ · $S_2 = 14$ · $S_3 = 18.5$

(2)
$$S_n = 8 + 6 + \frac{9}{2} + \dots + 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 8 + 6 + \frac{9}{2} + \dots + 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \dots$$

$$= \frac{8}{1 - \frac{3}{4}} = 32$$

2.

$f(x) = (x-16)^2(x-17)^2 + 3x$ 為實式為連續函數

$$f(16) = 48, \quad f(17) = 51$$

$$f(16) < 50 < f(17)$$

根據中間值定理 $\exists c \in (16, 17)$ 使得 $f(c) = 50$