(301-302, 304-315)

桃園市市立武陵高級中學106學年度第二學期高三自然組數學科第一次期中考

一、填充題(每格6分，共66分)

1. 求下列各式之極限值：(若極限值不存在則填入<u>不存在</u>)

(a) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{x-1}-\frac{5x-2}{x^3-1})=$__________　　(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-|x|}{|x^2-x|}=$__________

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{3n^2+3}+\ldots+\sqrt{3n^2+n}}{3n^2+2n+1}=$__________

2. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-15$ 且 $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)}{x^2-2x-8}=7$，
則 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=$ ________

3. 已知 p,q,r 均為小於10的正整數，且 p,q,r 成等差數列，若 $0.\overline{p}+0.2\overline{q}=0.4\overline{r}$，
求數對(p, q, r)=__________

4. a,b 為實數，設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-x+b}{x-1}, & x\neq1\\ 5, & x=1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續，則數對$(a,b)=$__________

5. 已知 $f(x)=x\cdot2^x$ 為連續函數，若 k 為正整數，且在 k 與 $k+1$ 之間有一個實數 c
滿足 $f(c)=2^{40}$，則 $k=$__________

6. x 為實數，若 $1+(1-2x)+(1-2x)^2+(1-2x)^3+\ldots+(1-2x)^n+\ldots=\frac{2x}{-x+3}$，求 x= __________

7. 平面上，設 $\overrightarrow{a}=(4,-3)$，$\overrightarrow{b}=(-5,12)$，今有一隻小螞蟻由原點出發，先朝向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向走 5 單位，再朝向量 $\overrightarrow{b}$ 的方向走 13 單位，到達點 $P_1(x_1,y_1)$；接著從 P_1 出發，先朝向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向走 $\dfrac{5}{2}$ 單位，再朝向量 $\overrightarrow{b}$ 的方向走 $\dfrac{13}{3}$ 單位，到達點 $P_2(x_2,y_2)$；依此類推，小螞蟻每次先朝 $\overrightarrow{a}$ 的方向，移動的距離為前一次朝 $\overrightarrow{a}$ 方向的 $\dfrac{1}{2}$；再朝 $\overrightarrow{b}$ 的方向，移動的距離為前一次朝 $\overrightarrow{b}$ 方向的 $\dfrac{1}{3}$。依序到達點 P_1、P_2、P_3、…、$P_n(x_n,y_n)$、…，

設 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=$ (______ , ______)

8. a、b為實數，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\dfrac{1}{2}$，則數對$(a,b)=$ ______

9. 設函數 $f(x)$ 在 $-4\le x\le 4$ 且 $x\ne 0$ 時滿足 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<x\le 4\\ -\dfrac{1}{x},-4\le x<0\end{cases}$，且對任意實數 x 均使 $f(x+8)=f(x)$ 成立，若將 $f(x)=x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 $<x_n>$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-x_{2n-1})=$ ______

二、計算證明題(第一題 10 分、第二題 8 分，共 18 分)

1. (1) n 為正整數，試證：$n>2$ 時，不等式 $8^n>7^n+5^n$ 恆成立 (8%)

   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+5^n}{8^n}=$ ______ (2%)

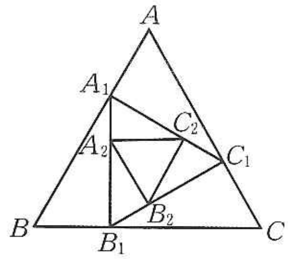
背面有題

2. 如右圖，已知正ΔABC邊長為 10，在各邊取 2：3 的分點A_1、B_1、C_1，

使得$2\overline{A_1B}=3\overline{A_1A}$，$2\overline{B_1C}=3\overline{B_1B}$，$2\overline{C_1A}=3\overline{C_1C}$，如此繼續作下去，

可得$\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta A_3B_3C_3$，……，設其面積分別

為S_1，S_2，S_3，……，則 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=$__________(8%)



三、多重選擇題(每題 8 分，共 16 分，錯一個得 5 分、錯兩個得 2 分、錯三個以上不給分)

1. 設$f(x)=|x|$，且$g(x)=x-2$，令$h(x)=f(x)-(f\circ g)(x)$，下列哪個選項是正確的？______

(A) $h(x)$的值域為$\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$　(B) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-2$　(C) $h(x)$是連續函數

(D) $\dfrac{h(1.5)-h(1)}{0.5}=1$　(E) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h(2+t)-h(2)}{t}=2$

2. 下列關於函數極限的敘述，哪些是正確的？__________

(A) 若$f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$，其中[ ]為高斯符號，則$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在

(B) 若$f(x)=\dfrac{[2x]-[x]}{x}$，其中[ ]為高斯符號，則$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在 且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在，則 $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x)$存在

(D) 若$f(x)$為一連續函數　且$f(a)=0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$ 存在

(E) 函數$f(x)$已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在　，則$f(1)=0$

背面有題

桃園市市立武陵高級中學106學年度第二學期高三自然組數學科第一次期中考答案卷

班級:________姓名:________________座號:____

一、填充題(每格6分，共66分)

1.(a)	1.(b)	1.(c)	2.
3.	4.	5.	6.
7.	8.	9.	

二、計算證明題(第一題10分、第二題8分，共18分)

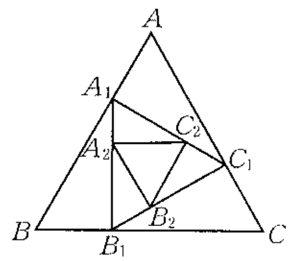
1. (1)n為正整數，試證：$n>2$時，不等式 $8^n>7^n+5^n$ 恆成立(8%)(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+5^n}{8^n}=$______(2%)

2. 如右圖，已知正ΔABC邊長為10，在各邊取2：3的分點A_1、B_1、C_1，

使得$2\overline{A_1B}=3\overline{A_1A}$，$2\overline{B_1C}=3\overline{B_1B}$，$2\overline{C_1A}=3\overline{C_1C}$，如此繼續作下去，

可得$\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta A_3B_3C_3$，……，設其面積分別

為S_1，S_2，S_3，……，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=$____________(8%)



三、多重選擇題(每題8分，共16分，錯一個得5分、錯兩個得2分、錯三個以上不給分)

1.	2.

桃園市市立武陵高級中學 106 學年度第二學期高三自然組數學科第一次期中考答案卷

班級:________ 姓名:________________ 座號:____

一、填充題(每格 6 分，共 66 分)

1.(a) $-2/3$	1.(b) -1	1.(c) $\sqrt{3}/3$	2. -16
3. $(2,4,6)$	4. $(3,-2)$	5. 34	6. $3/4$
7. $(\frac{1}{2},12)$	8. $(-1,1)$	9. 8	

二、計算證明題(第一題 10 分、第二題 8 分，共 18 分)

1. (1)n 為正整數，試證：$n>2$ 時，不等式 $8^n>7^n+5^n$ 恆成立(8%)(2)求 $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+5^n}{8^n}=$ $\underline{\ 0\ }$ (2%)

当 $n=3$ 1分

設 $n=k\ (k\geq 3)$ 1分

則 $n=k+1$

左 $=8^{k+1}=8^k\cdot 8>8\cdot(7^k+5^k)$

$>7\cdot 7^k+5\cdot 5^k$ 5分

$=7^{k+1}+5^{k+1}=$ 右

根據… 1分

$\lim_{n\to\infty}(\frac{7}{8})^n+(\frac{5}{8})^n$ → 0 → 0

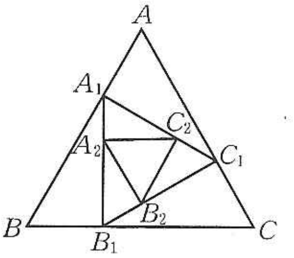
$=0$

2. 如右圖，已知正 ΔABC 邊長為 10，在各邊取 2：3 的分點 A_1、B_1、C_1，

使得 $2\overline{A_1B}=3\overline{A_1A}$，$2\overline{B_1C}=3\overline{B_1B}$，$2\overline{C_1A}=3\overline{C_1C}$，如此繼續作下去，

可得 $\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta A_3B_3C_3$，……，設其面積分別

為 S_1，S_2，S_3，……，則 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=$ $\underline{\ 175\sqrt{3}/18\ }$ (8%)



$\triangle A_1B_1C_1$ 的邊長 $=2\sqrt{7}$

$\sqrt{(\frac{2}{5}x)^2+(\frac{3}{5}x)^2-2\cdot\frac{2}{5}x\cdot\frac{3}{5}x\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{5}x$

公比 $=\frac{\sqrt{7}}{5}$ (邊長)　面積 $\frac{7}{25}$

$S=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 28}{1-\frac{7}{25}}$

三、多重選擇題(每題 8 分，共 16 分，錯一個得 5 分、錯兩個得 2 分、錯三個以上不給分)

1. A B C	2. B