國立武陵高級中學 106 學年度第一學期第二次期中考二年級自然組數學科試題卷

一.多選題(每題全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分)

1. 座標平面上有 A、B、C 三點，滿足 $\angle ABC$ 為直角，$\overline{AB}=\overline{BC}$，且向量 $\overrightarrow{AB}=(4,2)$，請選出可以為向量 $\overrightarrow{AC}$ 的選項。
(1)(－2 , 4)　(2)(2 , －4)　(3)(2 , 6)　(4)(－2 , 6)　(5)(6 , －2)。

2. 座標平面上有一等腰梯形，已知其兩邊分別落在 x 軸與直線 $y=\sqrt{3}x$ 上，另兩邊落在直線 L_1 與 L_2 上，且 L_1 與 L_2 的交點座標為 $(3,\sqrt{3})$，試問下列敘述哪些是正確的?
(1) L_1 與 L_2 必有其中一條直線的方程式為 $y=\sqrt{3}$
(2) L_1 與 L_2 必有其中一條直線的方程式為 $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$
(3) L_1 與 L_2 必有其中一條直線的方程式為 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$
(4)等腰梯形面積必為 $3\sqrt{3}$
(5)此等腰梯形面積有兩種可能值。

3. 下列敘述哪些是正確的?
(1)已知點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，點 O 為平面上任意的點，
若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則 $x=\frac{3}{5}, y=\frac{2}{5}$。
(2)平面上有一 ΔABC，O 是平面上一定點，動點 P 滿足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，$\lambda>0$，
則 P 點軌跡一定會通過 ΔABC 的內心。
(3)若平面上有非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影等於 $\overrightarrow{a}$ 在 $-\overrightarrow{b}$ 上的正射影。
(4)若 $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=0$，則 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ 或 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。
(5)若非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行。

二.填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	10	20	27	33	38	43	47	51	54	57	60	63

1. 設 $P(0,1)$、$Q(1,2)$、$R(-3,-4)$、$S(0,2)$為平面上四點，且 $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}$，$t$ 為實數，
則當 $|\overrightarrow{AB}|$ 有最小值時，$t=$_____。

2. 在座標平面上，有一直線 L 過點 $A(2,1)$，且點 $B(1,3)$ 到直線 L 的距離為 1，則直線 L 的方程式為_______。(請以一般式 $ax+by+c=0$ 作答)

3. 設 $\overrightarrow{a}=(2,-3)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，試求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為______。

4. 若四邊形 $ABCD$ 為一正方形，$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$，$2\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{0}$，令 $\theta=\angle PAQ$，則 $\cos\theta=$_____。

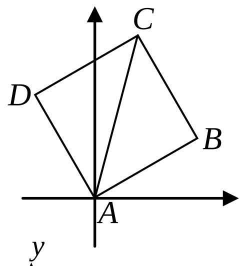
5. 設 ΔABC 為平面上的一個三角形，P 為此三角形內部之一點(含邊界)，若 ΔABC 面積為 8，

且 $\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，$t\in R$ ，則 ΔACP 的最大面積為______ 。

6. 已知座標平面上，有兩定點 $A(1,2)$, $B(3,3)$ ，且點 P,Q 為半徑等於 1 的圓上兩動點，

則內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最大值為_______ 。

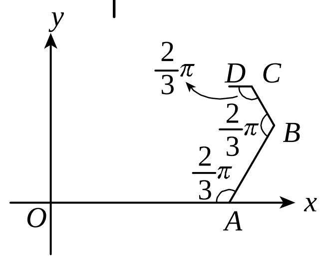
7. 如右圖，座標平面上正方形 $ABCD$，已知向量 $(1,2)$ 為直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 的方向向量，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率為______ 。



8. 如右圖，平面上 O 為原點，$\overline{OA}=8$ 、 $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=2$ 、 $\overline{CD}=1$，

$\angle OAB=\angle ABC=\angle BCD=\dfrac{2\pi}{3}$ ，若 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，

求數對 $(x\,,\,y)=$ _______ 。



9. 在座標平面上，甲質點由點 $A(-1,2)$ 處等速直線前進，1 秒後到達點 $B(2,6)$ 處並保持原方向與速度繼續前進,此時(甲質點到達點 B 時)乙質點由點 $C(10,10)$ 處出發等速直線前進(不一定與甲的速度相同)，希望走最短的路徑而與甲質點相撞，若乙質點由出發處至相撞處，所走的路徑長為 L，所花的時間為 T 秒，試求數對 (L,T) =_____ 。

10. $\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$ 、 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-1$ 、 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$，試求$\triangle ABC$ 之面積 $=$_____ 。

11. 平面上有一 ΔABC ，點 P 為邊 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{BP}:\overline{PC}=3:2$ ，過 P 點作直線 L，L 分別與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{AC}$ 交於 Q、R 兩相異點，若 $\overrightarrow{AB}=\alpha\,\overrightarrow{AQ}\,,\,\overrightarrow{AC}=\beta\,\overrightarrow{AR}$ ， $\alpha,\beta\in R$ ，則 $\alpha^2-\alpha\beta$ 的最小值為______ 。

12. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=2,\ \overline{BC}=3,\ \overline{CD}=4,\ \overline{DA}=5$ ，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ =______ 。

三.計算證明題(共 13 分)

1. 若座標平面上有兩點 $A\,(\,3\,,\,6\,)$、$B\,(-4\,,-2\,)$，直線 L：$x-2y=5$，
   (1)試求 B 對直線 L 的對稱點 B'坐標。 (4 分)
   (2)若 P 在 L 上，且使 $\overline{PA}+\overline{PB}$之值最小，試求 P 點坐標。 (4 分)

2. 在 ΔABC 中， $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c ，G 是 ΔABC 的重心，

若 $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+(\dfrac{\sqrt{3}}{3}c)\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ，試證： $a:b:c=1:1:\sqrt{3}$ 。 (5 分)

國立武陵高級中學 106 學年度第一學期第二次期中考二年級自然組數學科答案卷

一.多選題(每題全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分)

1.	2.	3.
(3)(5)	(2)(4)	(2)(3)(5)

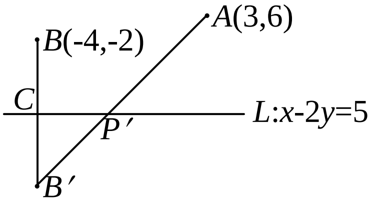
二.填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	10	20	27	33	38	43	47	51	54	57	60	63

1.	2.	3.	4.
$-\frac{9}{2}$	$3x+4y-10=0$ 或 $x=2$	$(\frac{-18}{25},\frac{-24}{25})$	$\frac{17\sqrt{305}}{305}$
5.	**6.**	**7.**	**8.**
6	$2\sqrt{5}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{-7}{8},\frac{3}{2})$
9.	**10.**	**11.**	**12.**
$(4,\frac{8}{5})$	$\frac{\sqrt{23}}{2}$	$-\frac{5}{12}$	7

三.計算證明題(共 13 分)

1.(1)(4 分)



① $\overleftrightarrow{BB'}: 2x+y=-10$ **(1 分)**

② $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow C(-3,-4)$ **(1 分)**

③$\Rightarrow B'(-2,-6)$ **(2 分)**

(2)(4 分)

①設 $\overline{AB'}$ 與 L 交於點 P'

又 $\overleftrightarrow{AB'}: 12x-5y=6$

$\Rightarrow P'(\frac{-13}{19},\frac{-54}{19})$ **(2 分)**

② $P\in L \Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

所以當 $P=P'(\frac{-13}{19},\frac{-54}{19})$ 時，

$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值。 **(2 分)**

2.(5 分)

因為 G 是 ΔABC 的重心 $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ……① **(1 分)**

由題意 $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+(\frac{\sqrt{3}}{3}c)\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ……②

所以①×a–②$\Rightarrow (a-b)\overrightarrow{GB}+(a-\frac{\sqrt{3}}{3}c)\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ **(1 分)**

又 $\overrightarrow{GB}$ 與 $\overrightarrow{GC}$ 不平行

所以 $a-b=0$ 且 $a-\frac{\sqrt{3}}{3}c=0$ **(2 分)**

故 $a:b:c=1:1:\sqrt{3}$ **(1 分)**