202-218, 220

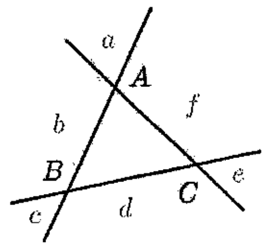
桃園市立武陵高級中學 110 學年度第一學期 高二數學科 期末考題目卷

範圍：數學第三冊 A. 第三章 平面向量 班級：_____ 座號：____ 姓名：________

一、多重選擇題 (每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上不給分)

1. (　　) 如右圖，已知平面上三直線交織成 $\triangle ABC$ 及 a,b,c,d,e,f 等六個區塊，

若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，請依據下列條件，選出正確的選項。



(1) 若 $\alpha+\beta=1$，則 P 點在直線 BC 上

(2) 若 $0<\alpha+\beta<1$，則 P 點必落在 $\triangle ABC$ 區塊內

(3) 若 P 點落在區塊 c 內，則 $\alpha+\beta>1$

(4) 若 $\alpha\beta>0$，則 P 點僅可能落在區塊 a 或區塊 d 內

(5) 若 P 點落在區塊 f 內，則 $\alpha+\beta>1$。

2. (　　) 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A、B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1,C_2,C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n}=\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，$n=1,2,3$，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{OC_1}\neq\overrightarrow{0}$　(2) $\overrightarrow{OC_1}<\overrightarrow{OC_2}<\overrightarrow{OC_3}$　(3) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$

(4) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$　(5) C_1,C_2,C_3 在同一直線上。

3. (　　) 已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2}$，且向量 $\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$ 平分向量 $\overrightarrow{a}$ 與向量 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，則下列哪些選項是正確的？

(1) 若向量 $\overrightarrow{a}$ 與向量 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=\frac{3}{4}$

(2) 向量 $\overrightarrow{a}$ 與向量 $\overrightarrow{b}$ 所展開的平行四邊形面積大於 $\frac{3}{2}$

(3) 向量 $\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$ 與向量 $\overrightarrow{a}$ 所展開的平行四邊形面積為 $\sqrt{7}$

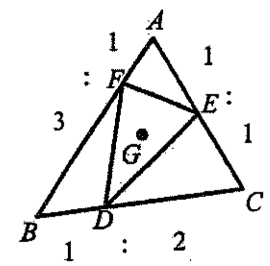
(4) 若向量 $\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$ 與向量 $t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 相互垂直，則 t 值為 -2

(5) 若向量 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 和向量 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 所展開的平行四邊形面積為 $3\sqrt{7}$，則 $t=\frac{8}{3}$。

二、填充題 (共 57 分，配分如下表)，分數答案皆化成最簡分數

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	8	16	24	30	36	42	47	52	57

1. 在 $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取 D，E，F 三點，如圖所示。若 $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$，$\overline{CE}:\overline{EA}=1:1$，$\overline{AF}:\overline{FB}=1:3$，又 G 為 $\triangle DEF$ 的重心，且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$__________。



2. 若實數 a,b,c,d 滿足 $a^2+b^2=25,\ c^2+d^2=2$ 且 $ac+bd=-1$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 之絕對值為________。

3. 若平面上有三點座標分別為 $A(2,5)$，$B(3,4)$，$C(-3,7)$，設 P 為直線 $\overline{BC}$ 上的一點，且 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影向量為 $\left(\frac{-13}{2},\frac{13}{2}\right)$，試求 P 點座標為______________。

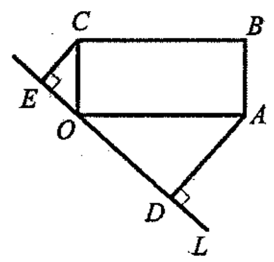
4. 已知直線 $L: x+\sqrt{3}y=3$，若有一直線與 L 的夾角為 $60°$ 且此直線通過 $\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$ 點，試求此直線方程式的一般式為______________。(將直線寫成：$ax+by+c=0$ 的型式且答案完整才給分)

背面有題

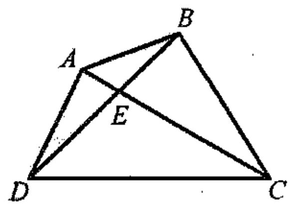
5. 已知聯立方程式$\begin{cases}(a-1)x+ay=1\\(a+2)x+(a+3)y=2\end{cases}$有解（$a$ 為實數），求$|x|+|y|$的最小值為_____。

6. 在△ABC 中，$\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=4$、$\overline{CA}=5$，若 H 是△ABC 的垂心，且 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$___________。

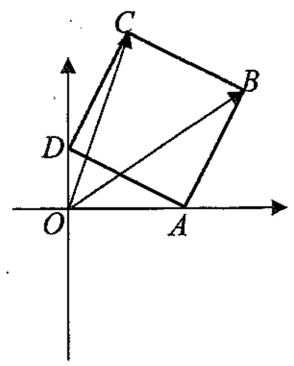
7. 如圖，設 $OABC$ 為一矩形，L 是過 O 點的一直線，且 $\overline{AD}\perp L$，$\overline{CE}\perp L$，若 $\overline{OD}=6$，$\overline{OE}=2$，則 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=$___________。



8. 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E 點。已知 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，求 ΔABE 的面積與 ΔCDE 的面積之比值為_______。



9. 如圖，邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 的頂點 A、D 分別在 x 軸、y 軸上移動，則內積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值為______________。



三、計算證明題 (無計算證明過程不予計分，共 19 分)

1. 老師請學生小武解答以下問題：

$\boxed{\text{設 } x, y \text{ 為正實數，且 } x+2y=8\text{，求 } \frac{9}{x}+\frac{2}{y} \text{ 的最小值。}}$

小武的解法是：

①利用算幾不等式，$8=x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$，得 $xy\leq 8$

②再用一次算幾不等式，$\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{\frac{18}{xy}}$

③由①，得知，$\frac{1}{xy}\geq\frac{1}{8}$

④$\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{18\times\frac{1}{xy}}\geq 2\sqrt{18\times\frac{1}{8}}=3$，故得 $\frac{9}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值為 3。

此時，另一個學生小陵舉手說，小武的解法有問題而且答案也不對。

(1) 你認為小武的解法在哪一步驟出現錯誤？請詳細說明其中的理由。〔4 分〕

(2) 請寫出此題的正確做法。當發生最小值時，寫出此時的 x、y 之值。〔6 分〕

2. 設直線方程式 $L: ax+by+c=0$，將直線 L 的法向量表示成 $\overrightarrow{n}=(a,b)$。試證明：

對任意點 $P(x_0,y_0)$ 到 L 的垂直距離，可表為：$d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。〔9 分〕

背面有題

202-218,220

桃園市立武陵高級中學 110 學年度第一學期 高二數學科 期末考題目卷

範圍：數學第三冊 A. 第三章 平面向量 班級：____ 座號：____ 姓名：________

一、多重選擇題(每題 8 分，錯一個選項得 6 分，錯兩個選項得 3 分，錯三個以上得 0 分)

1	2	3
【(1)(3)】	【(4)(5)】	【(3)】

二、填充題 (共 57 分，配分如下表)，分數答案皆化成最簡分數

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	8	16	24	30	36	42	47	52	57

1	2	3	4	5
【$\left(\dfrac{11}{36}, \dfrac{5}{18}\right)$】	【7】	【$(-7, 9)$】	【$x=2$ 或 $x-\sqrt{3}y+4=0$】	【$\dfrac{1}{3}$】
6	**7**	**8**	**9**	
【$\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{27}{35}\right)$】	【24】	【$\dfrac{1}{6}$】	【2】	

三、計算證明題 (無計算證明過程不予計分，共 19 分)

1〔10 分〕

(1) 答案：【兩個算幾不等式等號成立的條件不一致】〔4 分〕

(2) $\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2y}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{\dfrac{9}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right)^2\right]\geq(3+2)^2\Rightarrow 8\left(\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}\right)\geq 25$，故 $\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}$ 的最小值為 $\dfrac{25}{8}$。

當等號成立時，令 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\dfrac{9}{x}}}=\dfrac{\sqrt{2y}}{\sqrt{\dfrac{2}{y}}}=k\Rightarrow\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{1}=k$，代入 $x+2y=8$，得 $k=\dfrac{8}{5}$，故 $(x, y)=\left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$。

答案：【最小值為 $\dfrac{25}{8}$，此時 $(x, y)=\left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$】〔6 分〕

2〔9 分〕

【證明】

$$d(P,L)=\overline{PQ}=\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\cos\theta\right|=\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|}\right|=\frac{\left|(a,b)\cdot\left(x_0+\dfrac{c}{a},y_0\right)\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$