

數學科試題本

作答注意事項

作答時間：90 分鐘

配分方式：共 17 題，滿分合計 109 分，其中包含：

- 一、單選題 3 題，每題 4 分，共 12 分，每題答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，分數倒扣至本大題總分為零分止。不作答不予計分。
- 二、多選題 3 題，共 18 分。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分，答錯 1 個選項倒扣 $\frac{1}{5}$ 題分至該題分數為零分為止；所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 三、選填題 11 題，共 79 分，第 A 題至第 C 題，各題每格全部答對才得 5 分。第 D 題至第 K 題，每格全部答對才得 8 分。答錯或不作答不予計分。

作答方式：請用 2B 鉛筆在答案卡上畫記，請塗黑塗滿，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。

作答說明：

- (一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等四個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\boxed{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$

例：若第 10 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\boxed{1}$ 與 $\boxed{3}$ 劃記，如：

10	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$
----	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	---------------

- (二) 選填題：選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\boxed{3}$ 與第 19 列的 $\boxed{8}$ 畫記，如：

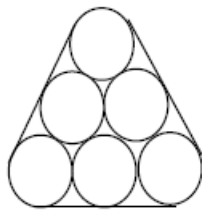
18	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$
19	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$

一、單選題（每題 4 分，共 12 分）

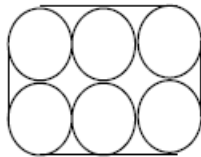
說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請將答案畫記至答案卡上。每題答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，分數倒扣至本大題總分為零分為止。不作答不予計分。

1. A 、 B 、 C 、 D 四人參加桃園市國中數學奧林匹亞數學競賽，若已知 B 和 D 兩人分數總和與 A 和 C 兩人分數總和相等，且 D 的分數比 B 和 C 兩人分數總和還高。若將 B 和 C 的分數互換，則 A 和 C 兩人分數總和超過 B 和 D 兩人分數總和。若 A 、 B 、 C 、 D 四人的分數皆為非負，試問從高分到低分的順序依序為何？
- (1) D, A, C, B (2) D, A, B, C
(3) D, C, B, A (4) A, D, C, B (5) A, D, B, C

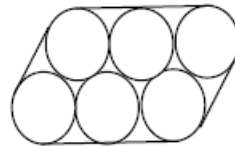
2. 下面有 18 罐等大的圓柱體罐頭，將它們分成 3 等份後，再分別用繩子把它們四周綁起來並綁緊(假設均用最短繩長綁緊)，如圖所示(從上往下俯瞰圖)，請問甲，乙，丙三種綁法，哪一種綁法所用的繩子最短？
- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 這三種綁法所用繩長一樣長
(5) 所用繩長跟圓柱橫切面之圓的半徑有關，無法確定哪一種綁法所用繩長最短



甲



乙



丙

3. 在奇異果樂園中住了一群人，而這群人有兩種不同的性格：具有天使性格的人，開口句句實話；而不具有天使性格的人就是具有惡魔性格，開口句句謊話。某日一個外來人口森森到這個樂園刷存在，在街上碰到甲與乙兩個在樂園居住的居民並與之對談，其中有對話如下：

甲說：「乙是個具有天使性格的人」

乙說：「我跟甲不是同類性格的人」

- 請問根據上面的對話，甲與乙分別是什麼樣性格的人？
- (1) 甲是惡魔性格，而乙具有天使性格 (2) 甲具有天使性格，而乙是惡魔性格 (3) 甲與乙均具有天使性格
(4) 甲與乙均是惡魔性格 (5) 無法由上述對話分辨甲與乙的性格

二、多選題（每題 6 分，共 18 分）

說明：第 4 題至第 6 題，每題有 5 個選項，每題至少有一個是正確或最適當的選項，請將答案畫記至答案卡上。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分，答錯 1 個選項倒扣 $\frac{1}{5}$ 題分至該題分數為零分為止；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 森老師在課堂上問了一個問題：「在坐標平面上，有一條直線 L 通過定點 $A(0, \sqrt{3})$ ，則在 L 上的有理數點 (x, y) （即 x, y 均為有理數）可能有多少個？」
- 學生甲回答：「0 個」
- 學生乙回答：「1 個」
- 學生丙回答：「2 個」
- 學生丁回答：「3 個」
- 學生戊回答：「無限多個」。
- 請問正確答案應包含甲、乙、丙、丁、戊五個學生中，哪些學生的答案？
- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 丁 (5) 戊。
5. 某次數學考試滿分 100 分。今有 8 位同學參加考試，平均成績 60 分，全距 40 分，假設每位同學的分數皆為非負，試問下列選項哪些正確？ (1) 可能有人得滿分 (2) 若有人得 95 分，則此 8 位同學考試成績的中位數大於 60 分 (3) 若有人得分為 95 分，且此 8 位同學考試成績的四分位差為 a 分，則 $a > 0$ (4) 若 8 人中有某 2 人的成績分別為 90 分、85 分，則剩下 6 人的成績皆不及格 (5) 若有人得 90 分，則不及格人數比及格的人數多
6. 設實數 a, b 滿足下列條件： $|a| > 1$ 、 $b \neq 0$ 、 $|a - b| = |a| + |b|$ 、 $|a - b| < 5$ 。試問下列敘述哪些是正確的？ (1) $ab < 0$ (2) $|a + b| > 5$ (3) $|b| < |a|$ (4) $b^2 < 16$
- (5) $(b + a)(b - a) > 15$

三、選填題(共 79 分)

說明：每題請依照答案格式將答案畫記到答案卡上。答錯或不作答不予計分。

第 A 題至第 C 題，各題每格全部答對才得 5 分。

第 D 題至第 K 題，各題每格全部答對才得 8 分。

- A. 已知有一個矩形 $ABCD$ ， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AD}=6\sqrt{3}$ ， M 為 $\overline{AB}$ 中點， N 為 $\overline{AD}$ 中點，以 M 為圓心， $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑在矩形 $ABCD$ 內部作半圓；以 N 為圓心， $\frac{1}{2}\overline{AD}$ 長為半徑在矩形 $ABCD$ 內部作半圓，若兩個半圓重疊區域面積為 $\frac{b}{a}\pi - \sqrt{c}$ ，其中 a, b 為互質的自然數，試求序對 $(a, b, c) = (\textcircled{7} , \textcircled{8} \textcircled{9} , \textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12})$

- B. 在一條筆直的道路測得 A, B, C, D 四個城市之間的某些距離資料，列表如下。例如城市 B 和城市 C 的距離為 13；城市 B 和城市 D 的距離為 8。根據這個資料，試問城市 A 和城市 B 之間的距離 = $\textcircled{13} \textcircled{14}$

	A	B	C	D
A			35	
B				8
C		13		21
D	14			

- C. 對於任意兩個正整數 a, b ，定義某種運算「 $\otimes$ 」規則如下：

(i) 當 a, b 均為正偶數或正奇數時， $a \otimes b = a + b$

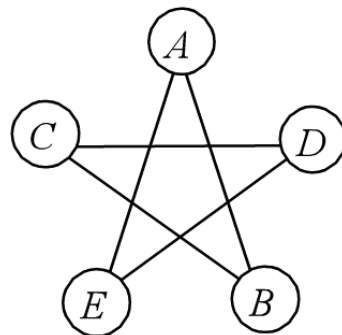
(ii) 當 a, b 其中一個為正偶數，另一個為正奇數時， $a \otimes b = ab$

在上述的定義下，若 a, b 均為正整數，滿足 $a \otimes b = 18$ 的數對 (a, b) 共有 $\textcircled{15} \textcircled{16}$ 組

- D. 定義 $h(g(x))$ 為兩函數 $h(x)$ 及 $g(x)$ 之合成函數，例如 $h(x) = 2x^2 + 5x - 1$ ， $g(x) = x + 1$ ，則 $h(g(x)) = 2(x+1)^2 + 5(x+1) - 1$ 。若 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ， $-2 \leq x \leq 1$ ，試求 $f(f(f(x)))$ 的最大值 = ①⑦ ①⑧

- E. 若 x 為實數，試求 $\sqrt{x^4 - 15x^2 - 8x + 80} - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ 的最大值 = $\sqrt{\textcircled{19} \textcircled{20}}$

- F. 如下圖所示的五星形，用數字 3、5、6、7、9 填入英文字母 A、B、C、D、E 處（不一定按此順序），每個數字只用一次。若在各線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EA}$ 兩端數字相加可得到 5 個和，且此 5 個和恰可排成等差數列，試問此等差數列正中間那一項的數字 = ②① ②②



G. 若 x, y 為實數，且滿足 $x + y = x^2 - xy + y^2 = a$ ，其中 a 是不為 0 和 1 的實數，試求

$$\frac{1-x^2}{y} + \frac{1-y^2}{x} = \underline{\textcircled{23} \textcircled{24}}$$

H. $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，已知 $\overline{BC}$ 上有一點 D 使得 $\angle CAD = 2\angle DAB$ ，若 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{2}{3}$

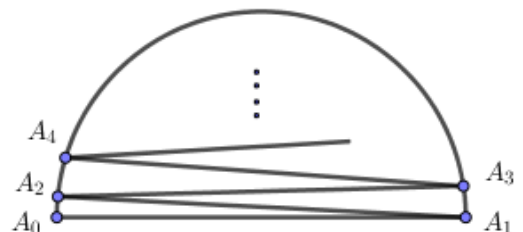
且 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{n}{m}$ ，其中 m, n 為互質的自然數，試求 $m+n$ 之值 = $\textcircled{25} \textcircled{26}$

I. 如圖所示，已知 $\overline{A_0A_1} = 2$ ，今以 $\overline{A_0A_1}$ 為直徑做一個半圓， $A_2, A_3, A_4, \dots, A_k, A_{k+1}$

是半圓上的點，若 $\angle A_0A_1A_2 = 1^\circ$ ， $\angle A_1A_2A_3 = 2^\circ$ ， $\angle A_2A_3A_4 = 3^\circ$ ， $\dots$ ， $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1} = k^\circ$ ，(k

為正整數)，若 $\overline{A_kA_{k+1}}$ 的長度小於 1，試求 k 的最小值 = $\textcircled{27} \textcircled{28}$

(附圖僅為示意圖，長度和角度不一定代表實際長度比例和角度大小)



J. 用火柴棒可排成數字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 等十個數字，如下圖所示：



今用 12 根相同的火柴棒排成三個數均相異的三位數(百位數字不可以為 0)，

例如  使用了 $2+3+7=12$ 根火柴棒，則此 12 根火柴棒共可以排成

29 30 種三個數均相異的三位數？

K. 試求 $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2^2}{3 \times 4} + \frac{3 \times 2^3}{4 \times 5} + \dots + \frac{10 \times 2^{10}}{11 \times 12} = \frac{\textcircled{32} \textcircled{33} \textcircled{34}}{\textcircled{31}}$ (化為最簡分數)