

## 數學科試題本

### 作答注意事項

作答時間：90 分鐘

配分方式：共 20 題，其中包含：

- 一、選填題 20 題，每題 5 分，答對得 5 分，答錯或不作答不予計分；共 100 分

作答方式：請用 2B 鉛筆在答案卡上畫記，請塗黑塗滿，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。

作答說明：

(一)選填題：選填題的題號是 A,B,C,...，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是②①，而答案是 -7 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 - 與第 21 列的 7 畫記。該題兩格需完全正確，才算答對。

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |
| 21 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | - | ± |

一、選填題(共 100 分)

說明：第 A 題至第 T 題，每題請依照答案格式將答案畫記到答案卡上。各題每格全部答對才得 5 分，答錯或不作答不予計分。

A. 奇異果公司的尾牙，波董決定提供 100 張千元鈔票放入若干個紅包中做為抽獎。已知每個獎項的金額都不相同(即每個紅包中的鈔票數都不一樣)，以金額最大的當做頭獎，每個紅包中至少要有一張千元鈔票。試問在能開出的獎項最多(即分最多包紅包)的情況下，頭獎最多有①②張千元鈔票。

B. 已知某個三角形中最大角和最小角的角度差為  $54^\circ$ 。試求滿足前述條件中最大的角的最大值為③④度。

C. 已知正實數  $a > b$  滿足  $a^2 + b^2 = 5ab$ ，若  $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{v}{u}}$ ，其中  $u, v$  為互質正整數，則數對  $(u, v) =$  (⑤, ⑥)。

D. 有一個正常的時鐘，若已知現在是下午 3 點到 4 點之間，且時針和分針重合(即時針和分針指向同一位置)，若此時是下午 3 點  $\frac{a}{b}$  分，其中  $a, b$  互質且  $a, b$  均為正整數，試問  $a+b =$  ⑦⑧⑨。

E. 設甲班有  $2x$  個人，乙班有  $3x$  個人，其中  $x$  為正整數。若今天從甲班選  $14-x$  人，從乙班選  $5x-11$  人來參加遊戲，試問從甲、乙兩班選人參加遊戲共有⑩⑪⑫種不同的選擇方法。

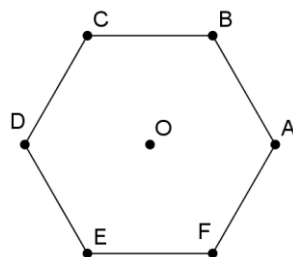
F. 已知拋物線  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 與  $x$  軸相交於點  $A$ 、 $B$  (點  $A$ 、 $B$  在原點  $O$  的兩側)，與  $y$  軸相交於點  $C$ ，且點  $A$ 、 $C$  在一次函數  $y = \frac{4}{3}x + n$  的圖形上，線段  $\overline{AB}$  長為 16，線段  $\overline{OC}$  長為 8，若當函數  $f(x)$  的值隨著  $x$  值的增大而遞減時，則自變數  $x$  的取值範圍為  $x < \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。

G. 平面上任意畫 10 個正三角形，試問這些正三角形的邊兩兩最多只會有一個交點，試問在不計頂點的情況下，最多會有 15 16 17 個交點。

H. 已知 7、11 都是 111111 的因數，若 123456787654321 除以 13 得到餘數  $a$ ，123456787654321 除以 37 得到餘數  $b$ ，求  $a + b = \underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

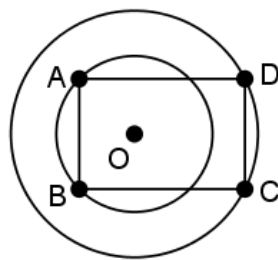
I. 有一個數列  $\langle a_n \rangle$ ，其前  $n$  項和滿足： $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^3$ ，若  $\frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_{100} - 1} = \frac{p}{q}$ ，其中  $p, q$  為互質的正整數，則  $p + q = \underline{\textcircled{20}\textcircled{21}\textcircled{22}}$ 。

J. 如圖，有一正六邊形  $ABCDEF$ ，邊長為 3，已知  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  相交於  $H$ ，現以  $H$  為圓心， $\overline{HA}$  為半徑作圓  $S$ 。今有一圓  $T$  同時內切於圓  $S$  以及正六邊形  $ABCDEF$  的外接圓。試求圓  $T$  的直徑的最大值為  $\textcircled{23} + \sqrt{\textcircled{24}}$ 。

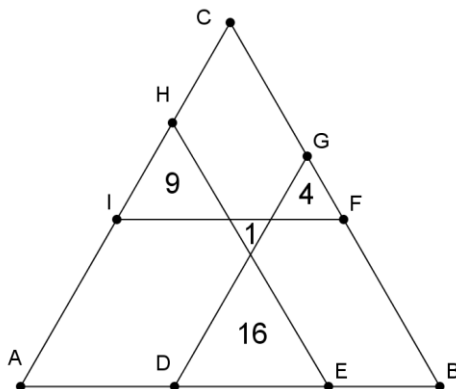


K. 已知  $-1 \leq y \leq 2$  且  $(2y^2 - 4y - 4)(1 - \frac{3}{x-1}) = x - 4$ ，則滿足上述條件的所有整數  $x$  的和為 2526。

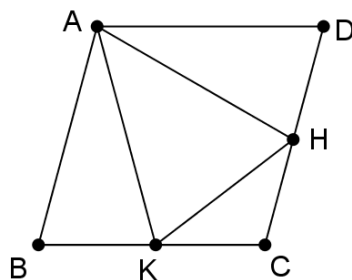
L. 如圖，兩同心圓半徑分別為  $2\sqrt{6}$  與  $4\sqrt{3}$ ，矩形  $ABCD$  的邊  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  恰為兩圓的弦。當矩形面積最大時，此時矩形的周長為 2728+2930  $\sqrt{2}$ 。



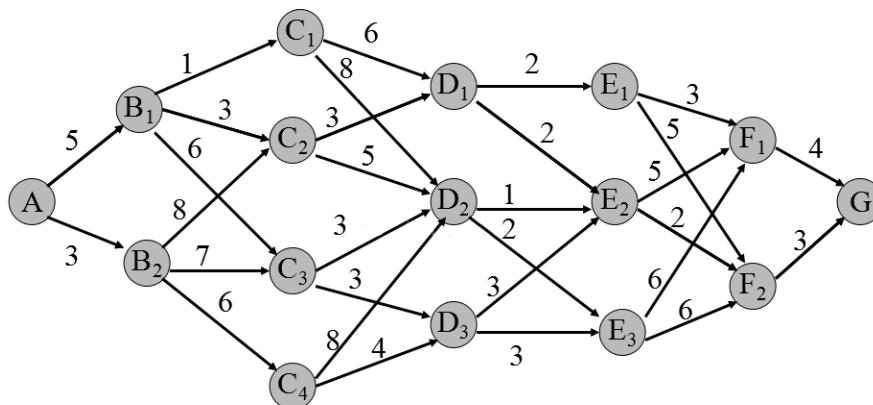
M. 在三角形  $ABC$  內部分別作三線段  $\overline{DG}$ 、 $\overline{EH}$ 、 $\overline{FI}$ ，使得  $D$ 、 $E$  在  $\overline{AB}$  線段上， $F$ 、 $G$  在  $\overline{BC}$  線段上， $H$ 、 $I$  在  $\overline{AC}$  線段上，如下圖所示。圖中的數字為所在三角形區塊的面積，試問，三角形  $ABC$  面積為 313233。



N. 菱形  $ABCD$  中， $K$ 、 $H$  分別在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  上，已知  $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AK} = \overline{AH} = 4$ ， $\triangle AKH$  面積為 4，求  $\angle ABC =$  3435 度 (圖片僅供參考並非代表真實比例)



- O. 今日早晨小陵的爸爸開車載小陵去參加考試，並且打算使用最新型的汽車導航系統。該系統的特色是能夠即時運算車流量及燈號預估從這個地點到下個地點的時間。如圖，每一個頂點為一個地點，每一個箭頭為一條道路，上面的數字代表到下個地點所需的分鐘數。小陵的爸爸要從家中(A 點)載小陵到學校(G 點)，依此系統的預估，最少花3637分鐘可以到達。



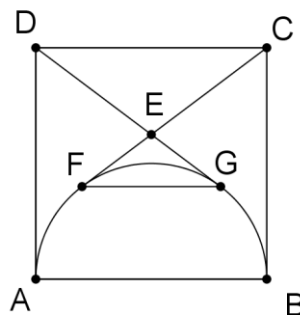
- P. 在平面直角坐標系中，過原點  $O$  及點  $A(0,2), C(6,0)$  作矩形  $OABC$ ， $\angle AOC$  的平分線交  $\overline{AB}$  於  $D$  點；點  $P$  從點  $O$  出發，以每秒  $\sqrt{2}$  個單位長的速度沿射線  $\overrightarrow{OD}$  方向移動；同時點  $Q$  從點  $O$  出發，以每秒 2 個單位長的速度沿  $x$  軸正向移動。設移動時間為  $t$  秒，則當  $\triangle PQB$  為直角三角形時， $t$  的值可為  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ，試求  $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = \underline{38} \underline{39}$ 。

- Q. 已知實數  $a, b, c$  滿足：
$$\begin{cases} abc = 1 \\ a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$$
，若  $\frac{1}{ab+c-1} + \frac{1}{bc+a-1} + \frac{1}{ca+b-1} = \frac{q}{p}$ ，其中  $p, q$  為

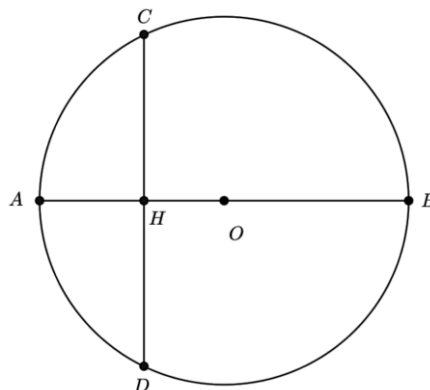
互質的兩個整數且  $p > 0$ ，則數對  $(p, q) = (\underline{40}, \underline{41} \underline{42})$ 。

數學選填題 Q 題經出題老師討論，因解出之  $a, b, c$  為 1 實數 2 虛數，與題目敘述  $a, b, c$  為實數不同，故該題送分，但答案不變，依聯立方程式仍可算出  $p, q$  之值

- R. 如右圖所示，正方形  $ABCD$  的邊長為 4，以  $\overline{AB}$  為直徑做一半圓，過  $C$ 、 $D$  兩點分別作此半圓的切線，切點分別為  $F$ 、 $G$ 。若兩切線的交點為  $E$ ， $\triangle EFG$  的面積為  $\frac{p}{q}$ ，其中  $p$ 、 $q$  為互質的兩個正整數，則  $p+q = \underline{43}$  ~~44~~。



- S. 如圖所示，一圓中， $O$  為圓心且弦  $\overline{CD}$  垂直直徑  $\overline{AB}$  於  $H$ ，且  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  長均為整數， $10 \leq \overline{AB} \leq 99$ ，而  $\overline{CD}$  的長度恰為  $\overline{AB}$  的長度中個位數字和十位數字對調所得的兩位數，若  $\overline{OH}$  為有理數，試求  $\overline{AB}$  長為 45 ~~46~~。



- T. 有六位成員的家庭要放 6 個元宵節天燈，一次放一個天燈，每次每個天燈恰有 2 個人一起放，且每個人都將放兩次天燈，且每次都與一位不同的人一起放，試問共有 47 ~~48~~ 種不同的搭配方法。(只考慮誰與誰一起放，不考慮放天燈的順序，也不考慮誰放哪一個天燈)