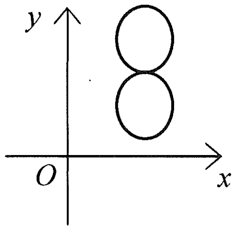
# 國立武陵高級中學 105 學年度第二學期高三自然組期中考數學試題

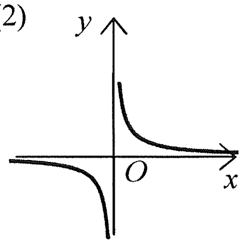
**範圍**：第一章全

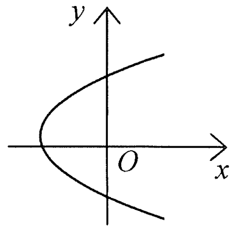
## 一、多重選擇題：每題 7 分，共 21 分

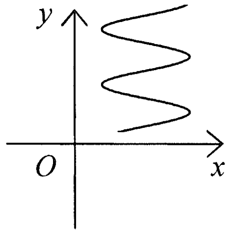
(錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答則得 0 分)

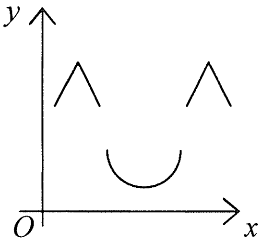
(　　)1. 判斷下列哪些不可能為函數圖形？

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(　　)2. 試問下列哪些選項中的無窮級數和收斂？

(1) $1+2+4+\cdots+2^{n-1}+\cdots$　　(2) $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots$

(3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$　　(4) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{2}+\cdots$

(5) $0.99+0.909+0.9009+\cdots+0.9\underbrace{0\cdots0}_{n-1\text{個}}9+\cdots$

(　　)3. 下列關於連續函數的敘述何者正確？

(1) 若 $f(x)\cdot g(x)$ 與 $g(x)$ 均為連續函數，則 $f(x)$ 為連續函數

(2) 若 $f(x)+g(x)$ 與 $g(x)$ 均為連續函數，則 $f(x)$ 為連續函數

(3) 若 $f^2(x)$ 為連續函數，則 $f(x)$ 為連續函數

(4) 若 $f(x)$ 為連續函數，則 $|f(x)|$ 為連續函數

(5) 若 $\frac{1}{f(x)}$ 為連續函數，則 $f(x)$ 為連續函數

## 二、填充題：共 63 分

| 答對題數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 8 | 16 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 |

1. 試求下列各極限值：(其中[ ]為高斯符號)

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)=$______ (2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left|x^2-2x-3\right|}{x-3}=$______ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{2+\sin\frac{1}{x}}=$______

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n-5}-\sqrt{n}}=$______ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right]=$______ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3^{2n}}{(-4)^n+3^{2n}}=$______

2. 當 $x$ 的範圍為________時，可使得數列$\left\langle\dfrac{(x+1)^n}{x}\right\rangle$收斂

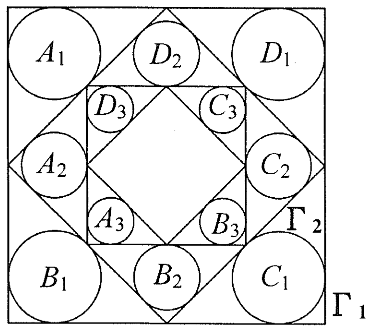
3. 設 $n$ 為正整數，求滿足$\left(0.1\overline{69}\right)n$為正整數時，$n$ 的最小值為______

4. 試求函數$f(x)=\sqrt{1-4^{\log_2 x}}$ 的值域為________

5. 兩無窮等比數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$的首項均為 1，且已知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\dfrac{6}{5}$且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{b_k}=3$，試求$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2=$______

6. 若三次多項式$f(x)$滿足$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{x+3}=25$，則$f(1)=$______

7. 如圖，將邊長為 4 的正方形$\Gamma_1$取各邊中點連接成正方形$\Gamma_2$，同時在$\Gamma_1$的 4 個角落被切割出 4 個全等直角三角形中作內切圓 $A_1$，$B_1$，$C_1$，$D_1$，並計算此四圓的面積和為 $R_1$，再將正方形$\Gamma_2$取各邊中點連接成正方形$\Gamma_3$，同時在$\Gamma_2$的 4 個角落被切割出 4 個全等直角三角形中作內切圓 $A_2$，$B_2$，$C_2$，$D_2$，並計算此四圓的面積和為 $R_2$，重複此動作繼續下去，可得無窮數列$\langle R_n\rangle$：$R_1$，$R_2$，$R_3$，⋯，試問$\sum\limits_{k=1}^{\infty}R_k=$______




**三、計算證明題**：共 16 分 (未寫計算過程不予計分)

1. 設數列 ⟨$a_n$⟩ 滿足$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=a_n+2n & 對所有n\ge 2\end{cases}$，並已判斷對所有的正整數 $n$，均有 $a_n\ge 0$，試求：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}$ (5 分) (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{a_{k+1}a_k}$ (5 分)

2. 設 $f(x)=\dfrac{x^5-6x^4-x^2+1}{6x^2-5x+1}$，試證在$(0,1)$中有實數 $c$ 滿足 $f(c)+c^2=0$ (6 分)

# 國立武陵高級中學 105 學年度第二學期高三自然組期中考數學解答卷

**範圍**：第一章全　　　　＿＿班 ＿＿號 姓名＿＿＿＿＿＿

## 一、多重選擇題：每題 7 分，共 21 分

(錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答則得 0 分)

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| (1)(3)(4) | (3) | (2)(4)(5) |

## 二、填充題：共 63 分

| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 8 | 16 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.(1) $\frac{-1}{6}$ | 1.(2) 不存在 | 1.(3) $0$ | 1.(4) $-2$ |
| 1.(5) 不存在 | 1.(6) $-1$ | 2. $-2<x<0$ | 3. $165$ |
| 4. $[0,1)$ | 5. $\frac{9}{8}$ | 6. $-12$ | 7. $\left(48-32\sqrt{2}\right)\pi$ |

## 三、計算證明題：共 16 分 (未寫計算過程不予計分)

1.

(1) 因為 $0<\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}+2(n-1)}\le\frac{1}{2(n-1)}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n-1)}=0$

故由夾擠定理知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$　(5 分)

(2) 設

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}a_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{a_{k+1}a_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{a_{k+1}a_k}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}$$　(5 分)

2.

設 $g(x)=x^5-5x^3+1$

因為 $g(0)=1>0$，$g(1)=-3<0$

且 $g(x)$ 為多項式函數，即 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 中連續

故由中間值定理(或勘根定理)知

在 $(0,1)$ 中有一個實數 $c$ 滿足

$g(c)=0$

$\Rightarrow c^5-5c^3+1=0$　$(*)$

$\Rightarrow c^5-6c^4-c^2+1+c^2\left(6c^2-5c+1\right)=0$

$\Rightarrow \frac{c^5-6c^4-c^2+1}{6c^2-5c+1}+c^2=0$　(由$(*)$知$c\ne\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$)

$\Rightarrow f(c)+c^2=0$

(6 分)