國立武陵高中一〇五學年度第一學期一年級第二次期中考數學科試卷

一.多重選擇題：(每題 8 分，共 24 分。答錯一個選項得 5 分，答錯兩個得 2 分，答錯三個以上得 0 分，未作答不給分。)

1. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x-\frac{1}{4}$，得商式 $q(x)$，餘式 r。下列敘述哪些正確：

(A) $f(x)$ 除以 $4x-1$ 所得的商式為 $\frac{q(x)}{4}$。

(B) $f(\frac{x}{4})$ 除以 $x-1$ 所得的商式為 $\frac{1}{4}q(x)$。

(C) $f(4x)$ 除以 $16x-1$ 所得的餘式為 r。

(D) $xf(x)$ 除以 $x-\frac{1}{4}$ 所得的餘式為 $\frac{1}{4}r$。

(E) $f(x^2)$ 除以 $x+\frac{1}{2}$ 所得的餘式為 r。

2. 多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形如右下，已知圖形與 x 軸恰交於三點，其中一交點坐標為 $(-1,0)$。下列敘述哪些正確：

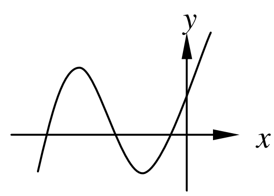
(A) $y=f(x)$ 不可能是 4 次多項式函數。

(B) $y=f(x)$ 是奇函數。

(C) 若 $0<a<b$，則 $f(a)<f(b)$。

(D) 方程式 $f(x^2)=0$ 沒有實根。

(E) $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式是一次多項式。



3. 關於方程式 $x^3-3x^2-2x+5=0$ 根的描述，下列敘述哪些正確：

(A)三實根。

(B)一實根兩共軛虛根。

(C)一負根兩正根。

(D)兩負根一正根。

(E)三正根。

二.填充題：(每題 5 分，共 50 分。答錯不倒扣，未作答不給分。)

1. 設$a=0.2^{\frac{2}{3}}$, $b=0.04^{\frac{5}{2}}\cdot 0.008^{-1}$, $c=0.2^{-1}$, $d=(0.2^{-\frac{2}{9}})^{9}$, $e=5^{-\frac{4}{3}}$，試比較以上五個數的大小：______。

2. 化簡$\sqrt{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{27}}}\div\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$，其值為______。(化為最簡形式)

3. 設$a>0$，且$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，則$\dfrac{a+a^{-1}+2}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}$值為______。

4. 已知不等式$ax^2-4x+b<0$的解為$x<-1-\sqrt{5}$或$x>-1+\sqrt{5}$，則不等式$3x^2+ax-b<0$的解為______。

5. 設實係數多項式$f(x)$滿足$f(1+i)=5+3i$，且$f(x)$除以x^2-2x+2的餘式為$r(x)$，則函數值$r(1)$為______。

6. 多項式$f(x)$除以x^2+3x-4所得餘式為$-x-7$；$f(x)$除以x^2+x-12所得餘式為$3x+9$，則$f(x)$除以$x^3-13x+12$所得餘式為$r(x)$，則函數值$r(2)$ 為______。

7. 已知領導係數為 1 的三次多項式函數$y=f(x)$其圖形通過下列三點$\boldsymbol{A}(1，1)$，$\boldsymbol{B}(2，4)$，$\boldsymbol{C}(3，15)$。則函數值$f(5)$為______。

8. 設 $f(x)=16x^4-8x^3-28x^2+36x-5$。則 $f(0.505)$ 的近似值，四捨五入取到小數點後第二位為______。

9. 已知對任意實數 x，函數 $f(x)=kx^2+kx+2$ 的值恆正，則實數 k 的範圍為______。

10. 整係數方程式 $4x^3-20x^2+cx+d=0$ 的三根中，其中兩根的乘積為 $2-4i$，則**互質的整數對** (c,d) 為______。

三.計算證明題：(合計 26 分)

1.(1)請敘述「虛根成對定理」。(3 分)　　(2)請證明「虛根成對定理」。(7 分)

2. (1) 解方程式：$4x^4-8x^3+7x^2-8x+3=0$。(6 分)

(2) 解不等式：$\dfrac{4x^4-8x^3-8x-4}{x^2+1}<-7$。(4 分)

3. 方程式 $x^3+cx+d=0$ 有三個虛數根：α,β,γ，滿足 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=\gamma\overline{\gamma}=2$，求 c 的值。(6 分)

國立武陵高中一〇五學年度第一學期一年級第二次期中考數學科試卷

座號：________ 姓名：________

一.多重選擇題：(每題 8 分，共 24 分。錯一個選項得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上得 0 分。)

1.	(A)(C)(D)(E)	2.	(A)(D)(E)	3.	(A)(C)

二.填充題：(每題 5 分，共 50 分。答錯不倒扣，未作答不給分。)

1.	***b<e<a<c<d***	2.	$\frac{8}{9}$	3.	$\frac{1}{2}$	4.	$-\frac{4}{3}<x<2$
5.	**5**	6.	**3**	7.	**85**	8.	**6.05**
9.	$0\le k<8$	10.	**(21，-20)**				

沒寫**實係數**扣 2 分

沒寫**多項式**扣 2 分

沒寫**虛根**或 **b≠0** 扣 1 分

三.計算題：(26 分)

1. (1)(3 分) 設**實係數** n ($n\geqq 2$)次多項方程式 $f(x)=0$ 有一**虛根** $z=a+bi$，則 $\bar{z}=a-bi$ 必為另一根。

(2)(7 分) ①實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 滿足 $f\left(\bar{z}\right)=\overline{f(z)}$。($z\in C$)

$$\because f\left(\bar{z}\right)= a_n\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}+a_0 = \overline{a_n}\,\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z}+\overline{a_0}$$

少一個步驟扣 2 分

$$= \overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1z}+\overline{a_0} = \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0} = \overline{f(z)}$$

② 若 $f(z)=0$，則由①可知 $f\left(\bar{z}\right)=\overline{f(z)}=\bar{0}=0$，即 $\bar{z}$ 為 $f(x)=0$ 另一根。

2. (1)(6 分) $4x^4-8x^3+7x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)(x^2+1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\pm i$ 。

(2)(4 分) 因為 x^2+1 恆正，原 $\Rightarrow 4x^4-8x^3+7x^2-8x+3<0\Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

3.(6 分) 依題：$\alpha+\beta+\gamma=0$，則

$$c=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\alpha\beta\gamma\left(\frac{\bar{\alpha}}{2}+\frac{\bar{\beta}}{2}+\frac{\bar{\gamma}}{2}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\left(\overline{\alpha+\beta+\gamma}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\left(\bar{0}\right)=0$$