

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	+
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	+

一、選擇題(佔 40 分)

說明：第1 題至第8 題，每題有四個選項，其中只有一個是最適當的選項，請將答案畫記至答案卡上。每題答對得5分，答錯或不作答不予計分。

1. 一串數列0,1,5,24,115,...，規律如下：除了第一個數之外，每個數字的5倍正好等於其前後兩數字的和，試問此數列的第2015個數字除以4的餘數為多少？
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0。

2. 已知圓周上有12個等分點，今任取4個點為頂點，試問共可決定幾個梯形？
(1) 48 (2) 72 (3) 108 (4) 120

3. 若 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ ， $g\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 4x$ ，則 $f\left(\frac{-1}{2}\right) + g\left(f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ 的值為下列何者？
(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

4. 若小武和小陵兩人在長90公尺的直線跑道兩頭練習折返跑(即兩人分別在跑道的起點和終點)，若小武以每秒3公尺的速率在進行跑步，小陵以每秒2公尺的速率在進行跑步，若不計折返的轉向及途中相遇閃避的時間，試問小武和小陵在12分鐘內互相閃過的次數為下列何者?(假設12分鐘內兩人均不改變跑步的速率)
(1) 18 (2) 19 (3) 20 (4) 21

5. 有一輪胎A的半徑為50公分，若將此輪胎的半徑減少1公分作成一個新輪胎B，今將兩輪胎各自在地面上滾動1公里後，輪胎B輪子轉的圈數和輪胎A輪子轉的圈數的關係，下列何者正確？
(1) 輪胎B比輪胎A增加20% (2) 輪胎B比輪胎A增加2%
(3) 輪胎B比輪胎A增加1% (4) 輪胎B比輪胎A增加0.5% (選出一個最接近者)

6. 有一矩形其中一邊長為 5，另一邊長為 x ，已知 $0 < x < 4$ ，若將此矩形沿某一折線折起來使兩對角頂重合，若此折線的折痕長為 $\sqrt{6}$ ，試問 x 的值為下列何者？

- (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{\frac{11}{2}}$ (4) 2

7. 設實數 x, y 滿足 $x + 3y + |3x - y| = 19$ ， $2x + y = 6$ ，則 $x + y$ 的值為下列何者？

- (1) 5 (2) $\frac{11}{2}$ (3) 6 (4) $\frac{13}{2}$

8. 若 n 為正整數，則定義符號 $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ，例如 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 。

已知 $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 12! = m! \times n^2$ ，其中 m, n 皆為正整數，試問 m 之值為何？

- (1) 12 (2) 10 (3) 8 (4) 6

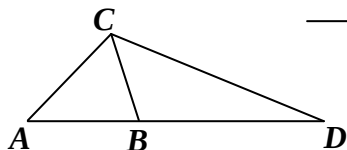
二、選填題(佔 80 分)

說明：第A 題至第J 題，每題請依照答案格式將答案畫記到答案卡上。各題每格全部答對才得8 分，答錯或不作答不予計分。

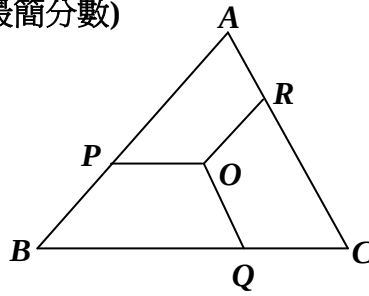
A. 求 $\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)(4^3 - 1) \cdots (100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)(4^3 + 1) \cdots (100^3 + 1)} = \frac{\textcircled{9} \textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12}}{5050}$ 。(化為最簡分數)

B. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = \sqrt{3}$ ， A, B, D 三點共線，

且 $\angle A = \angle BCD = 45^\circ$ ，則 $\triangle BDC$ 的面積為 $\frac{\textcircled{13} + \sqrt{\textcircled{14}}}{\textcircled{15}}$ 。



- C. 如下圖，點 O 是 $\triangle ABC$ 內部一點，點 P 、 Q 、 R 分別是邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上的點，且 $\overline{OP} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{OQ} \parallel \overline{CA}$ ， $\overline{OR} \parallel \overline{AB}$ ，若 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = x$ ，且三邊長 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CA} = 2$ ，則 $x = \frac{\textcircled{16} \textcircled{17}}{\textcircled{18} \textcircled{19}}$ 。(化為最簡分數)



- D. 在連續正整數的數列中，由 1 開始依次按下面的規則染色：

(1) 先將 1 染成綠色

(2) 在 1 之後染 2 個連續偶數成紅色：2, 4

(3) 在 4 之後染 3 個連續奇數成綠色：5, 7, 9

(4) 在 9 之後染 4 個連續偶數成紅色：10, 12, 14, 16

(5) 在 16 之後染 5 個連續奇數成綠色：17, 19, 21, 23, 25

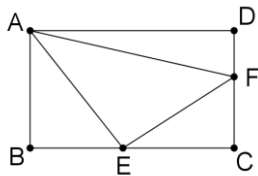
依此規則繼續下去。今將染色的數字重新排成一數列，試問：從小排到大第 81 個綠色的數字與第 81 個紅色數字之和為 $\textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}$ 。

- E. 設 $\{x\}$ 代表 x 的小數部分，例如 $\{3.6\} = 0.6$ ， $\left\{\frac{15}{7}\right\} = \left\{2 + \frac{1}{7}\right\} = \frac{1}{7}$ ， $\{5\} = 0$ 。試求：

$$\left\{\frac{5 \times 7 \times 1}{1999}\right\} + \left\{\frac{5 \times 7 \times 2}{1999}\right\} + \left\{\frac{5 \times 7 \times 3}{1999}\right\} + \cdots + \left\{\frac{5 \times 7 \times 1997}{1999}\right\} + \left\{\frac{5 \times 7 \times 1998}{1999}\right\} = \underline{\textcircled{23} \textcircled{24} \textcircled{25}}。$$

- F. 若 a, b, c 是質數，且滿足 $ab^b c + a = 2000$ ，則 $c = \underline{\textcircled{26} \textcircled{27}}$ 。

- G. 如下圖，矩形 $ABCD$ 中， E, F 分別在 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 上，若 $\triangle ABE$ 的面積為 10， $\triangle CEF$ 的面積為 6， $\triangle ADF$ 的面積為 8，則 $\triangle AEF$ 的面積為 28 29。



- H. 設有相異的 23 個正整數，其和為 4845。求此 23 個數的最大公因數的最大可能值為 30 31。

- I. 有一群旅客決定分乘幾輛大客車，要使每車有相同的人數。起先，每車乘坐 22 人，可是發現這時有 1 人坐不上車。若是開走一輛空車，那麼所有的旅客剛好平均分乘餘下的客車。若原有大客車輛數為 a (未開走一輛時)，旅客人數為 b ，則 $ab =$ 32 33 34 35 36。
(已知每輛客車最多容納 32 人)

- J. 考慮下列方程組：
$$\begin{cases} x + y = 3(z + u) \\ x + z = 4(y + u) \\ x + u = 5(y + z) \end{cases}$$
 的解 (x, y, z, u) ，其中 x, y, z 與 u 皆為正整數，試問

x 可能的最小值為 37 38。