

武陵高中 104 學年第二學期第一次期中考高三數學(社會組)題目卷

要在「答案卷」上作答

計算證明題(15%，要有過程，否則該題0分)

1. (1)證明：當正整數 $n \geq 4$ 時，不等式 $2^n \geq n^2$ 恆成立 (10分)(2)求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = ?$ (可利用第(1)小題) (5分)

填充題(65%，每題5分，要化最簡，否則該題0分，未完全答對該題不給分)

2. 已知無窮數列 $\langle c_n \rangle$ 滿足不等式 $\frac{n-2}{3n} \leq c_n \leq \frac{n+2}{3n}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n =$ _____3. a, b 為實數， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn - 4}{3n + 1} = \frac{1}{4}$ ，求 $a^2 + b^2 =$ _____4. 將循環小數 $0.\overline{423}$ 化成最簡分數_____

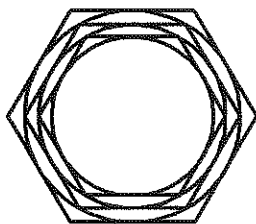
5. xy 平面上，對所有正整數 n ，拋物線 $\Gamma_n: y = n(n+2)x^2 - 2(n+1)x + 1$ ，設拋物線 Γ_n 與 x 軸交於相異兩點 A_n, B_n ， $\overline{A_n B_n}$ 表示 A_n, B_n 兩點的距離，求 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_n B_n}$ 的值為_____

6. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，且 $a_n = 7S_n - 4$ ， n 為正整數，求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

7. $a_n = \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 在周長為 12 的正六邊形 T_1 內作一內切圓 C_1 ，在內切圓 C_1 內作一內接正六邊形 T_2 ，在正六邊形 T_2 內作一內切圓 C_2 ，仿上繼續作下去。得一系列的內切圓 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$ 求全部無窮多個內切圓（即 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$ ）的面積總和 = _____



9. 無窮等比級數 $3 + \frac{3}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{3}{2^{n-1}} + \cdots$ 的和為 S ，前 n 項和為 S_n ，且 $|S - S_n| < \frac{1}{100}$ ，求最小正整數 $n =$ _____

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)^3}{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)^2} =$ _____

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-2} - 7 \times 2^{3n}}{3^{n+2} + 2^{3n+2}} =$ _____

12. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n} - \frac{n^2 - 3n}{n+1} \right) =$ _____

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 16n - 2} - n) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n+3)a_n = 5$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+2)a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

多重選擇題(20%，每題 10 分，每題只錯一個選項得 5 分)

15. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 均為無窮數列，選出正確的選項？

- (A) 若 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 必為收斂數列
 (B) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列， $\langle b_n \rangle$ 為發散數列，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 必為發散數列
 (C) 若對一切正整數 n ，恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，且 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 兩數列均收斂，則數列 $\langle b_n \rangle$ 亦收斂
 (D) 若對一切正整數 n ，恆有 $a_n < b_n < c_n$ ，且 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 三數列均收斂，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

16. 選出正確的選項？

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n = 0$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ 是發散級數

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{5}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2-2n+5}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n+5}{n-1} = \infty - \infty = 0$

教師用解答

武陵高中 104 學年第二學期第一次期中考高三數學(社會組)答案卷

班級: _____ 姓名: _____ 座號: _____

計算證明題(15%，要有過程，否則該題0分)

1. (1)證明：當正整數 $n \geq 4$ 時，不等式 $2^n \geq n^2$ 恆成立 (10分)

(2)求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = ?$ (可利用第(1)小題) (5分)

(1)當 $n=4$ 時，左式 $=2^4=16$ ，右式 $=4^2=16$ ，因此 $2^4 \geq 4^2$ ，原式成立。 (2分)

設 $n=k$ ($k \geq 4$)時原式成立，即 $2^k \geq k^2$ ， (1分)

則當 $n=k+1$ 時，

左式 $=2^{k+1}=2 \times 2^k \geq 2 \times k^2$ ，右式 $=(k+1)^2=k^2+2k+1$ ，

左式-右式 $\geq 2k^2 - (k^2+2k+1) = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 \geq (4-1)^2 - 2$

$=7 > 0$ (因為 $k \geq 4$)，因此左式大於或等於右式，

即 $2^{k+1} \geq (k+1)^2$ ，所以原式在 $n=k+1$ 時成立。 (7分)

由數學歸納法可知：對所有大於3的正整數 n ， $2^n \geq n^2$ 恆成立。

(2) $2^n \geq n^2$ ($n \geq 4$) $\Rightarrow 0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ ($n \geq 4$) (2分)

因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，由夾擠定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (3分)

填充題(65%，每題5分，要化最簡，否則該題0分，未完全答對該題不給分)

2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{419}{990}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{3}{2}$	12π
9	10	11	12	13	14	
10	$\frac{9}{8}$	$\frac{-7}{4}$	4	8	$\frac{15}{4}$	

多重選擇題(20%，每題10分，每題只錯一個選項得5分)

15	16
AB	AB