國立武陵高中104學年度第二學期第一次段考自然組試題 (高三)

一.多重選擇題：每題8分 (答錯一個選項得5分,兩個選項得兩分,答錯3個以上不給分)

1. 下列何者正確： (1)設 $\langle a_n\rangle$ 為一數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收斂級數

(2).設 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$,則 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-\beta)=0$

(3)若 數列 $\langle a_n\rangle$ 趨近於無限大且數列 $\langle b_n\rangle$ 趨近於 0，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

(4)存在有 $n_0\in N$ ，使得 $n\ge n_0$ 時 $a_n\le b_n\le c_n$ 並且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ ，則 $\langle b_n\rangle$ 也是收斂數列

(5)若 $\langle a_n\rangle$ 為一收斂數列，且任意正整數n， $a_n\neq 0$ ，則數列 $\left\langle\dfrac{1}{a_n}\right\rangle$ 也是收斂數列

2.下列何者正確： (1)若 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 也存在

(2) 設$f(x)$為一實函數，$f(a)f(b)<0$，則方程式$f(x)=0$在a與b之間至少有一根

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 為一定數，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^3+x^3}{x}$ 值不存在

(5)若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

二.填充題: 每題6分

已知：若 $\langle a_n\rangle$ 收斂,則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$;若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在,則 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

1.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)=$

2.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}}\right)$

3.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}\right)=$

4.求函數 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-|x-2|}}$ 的定義域______, 值域______

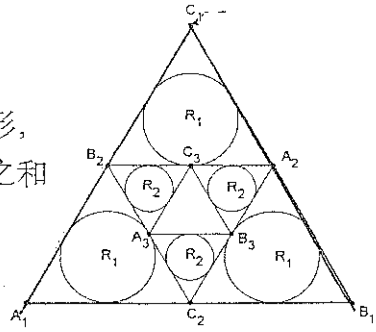
5.已知 $g(x)=3-x$ 且 $(f\circ g)(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{1-x}$,求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$

6. $x\in R$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2x^{2n}-3}{3x^{2n}+5}$ 之值可能為______

7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}, & x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{6}, & x=1\end{cases}$ 在x=1處為連續,求數對(a,b)______

8.f(x)為實係數多項式，deg(f(x))=3且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2,\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$,求f(x)=______

國立武陵高中104學年度第二學期第一次段考自然組試題



9. 設三角形 $\Delta A_1B_1C_1$ 邊長為6, $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 是 $\Delta A_nB_nC_n$ 的中點三角形,
R_n 為 $\Delta A_nB_nC_n$ 除去 $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 後剩下三個三角形的內切圓面積之和

求 $\sum_{n=1}^{\infty} R_n =$________

三.計算證明題：要寫出計算過程

1.試證：當n為任意正整數時,不等式 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}$ 恆成立.（9分）

2.(1)試證: $k-1\le\sqrt{(k-1)(k+3)}<k+1$ （4分）

(2)若 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(k-1)(k+3)}$ 試證： $\frac{n(n-1)}{2}\le S_n<\frac{n(n+3)}{2}$ （4分）

(3)求 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}=$ （5分）

3.已知 $y=\sin x$ 在所有實數皆連續.且連續函數乘連續函數還是連續函數. （8分）

設 $f(x)=\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2\pi}{x}$

試證：至少存在一實數 c ,使得 $f(c)=7$

國立武陵高中104學年度第二學期第一次段考自然組試題 高三

答案卷：　　　　　　　　　　　　　　班級：　　座號：　　姓名：

一.多重選擇題：每題8分（答錯一個選項得5分,兩個選項得兩分,答錯3個以上不給分）

1　2,4	2.　3

二.填充題: 每題6分

1. $\dfrac{1}{3}$	2.　3	3. $\dfrac{3}{8}$
4. $\{x \mid 5 > x > -1\}, \left\{y \mid y \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$	5.　4	6. $-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{8}, -\dfrac{3}{5}$
7. $(8,3)$	8. $(x-1)(x-2)(3x-4)$	9. π

三.計算證明題：要寫出計算過程

1.試證：當n為任意正整數時,不等式$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}\le\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4n}$恆成立. (9分

2.(1)試證:$k-1\le\sqrt{(k-1)(k+3)}<k+1$　(4分)

(2)若$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(k-1)(k+3)}$試證：$\dfrac{n(n-1)}{2}\le S_n<\dfrac{n(n+3)}{2}$　(4分)　　(3)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{2n}}{S_n}=$　(5分)

(3)　4

3.已知$y=\sin x$在所有實數皆連續.且連續函數乘連續函數還是連續函數.　(8分)

設$f(x)=\left(\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{2\pi}{x}$

試證：至少存在一實數c,使得$f(c)=7$