202, 204~215

國立武陵高級中學 104 學年度第 2 學期 數學科 高二自然組 期末考

範圍：3-3 反方陣~4-2　　班級：________　座號：________　姓名：__________

一、 配合題：(每題 2 分，共 10 分)

請寫出下列各小題在坐標平面上的圖形：(填寫下面代號即可)

(A)拋物線　(B)橢圓　(C)直線　(D)線段　(E)點　(F)無圖形

1. (　　) $\dfrac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

2. (　　) $4x^2+y^2-4x+6y+10=0$.

3. (　　) $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}=5$.

4. (　　) $x^2+ay^2+2bx-4y=0$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，b 為任意實數 .

5. (　　) $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=0$.

二、 多重選擇題：(答對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分)

1. (　　) 關於坐標平面上的線性變換，請選出正確的敘述：

(A) 若 A 為旋轉矩陣，則 $A^{-1}=-A$.　　(B) 若 A 為鏡射矩陣，則 $A^{-1}=A$.

(C) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 為對 y 軸做鏡射的矩陣 .　　(D) 若 $\triangle ABC$ 在推移變換 $(x,y)\to(x+2y,y)$ 之下，變換成 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 的面積相等.　(E) 設矩陣 A 為對直線 $y=x$ 做鏡射的矩陣，因為矩陣 A 可將點 $P(2,0)$ 變換至 $Q(0,2)$，等同於將 P 點旋轉 90 度，故 A 矩陣也可寫為旋轉 90 度的旋轉矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}$.

三、 填充題(共 10 格，配分如下表)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	18	26	34	40	46	52	58	64	68

1. 拋物線 $y^2+2y+3x-8=0$ 的焦點坐標為__________.

2. 設對於任意實數 x，矩陣 $A=\begin{bmatrix} x+1 & a \\ 1 & x \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣 A^{-1} 皆存在，求實數 a 的範圍為________.

3. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$，矩陣 $P=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. 已知 $A=PBP^{-1}$，其中 B 也為二階方陣. 若 $A^n=\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$，

   試求 $c_n=$__________. (以 n 表示)

4. 設 A 是二階方陣，已知 $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，若 $A^9\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，求實數數對 $(a,b)=$________

5. 坐標平面上，若直線$2x+y=7$經過矩陣$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$變換後得直線$5x+y=84$，則實數數對

$(a,b)=$________ .

6. 設橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$經過伸縮變換$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$(a>0)$後會變成一個圓 C，

(1)求$a=$________ .　　　　(2)求圓 C 的圓心坐標為__________ .

7. 在坐標平面上，過$F(4,0)$的直線交拋物線$y^2=16x$於 P、Q 兩點，若$\overline{PF}:\overline{QF}=4:1$，求線段$\overline{PQ}$長度為__________ .

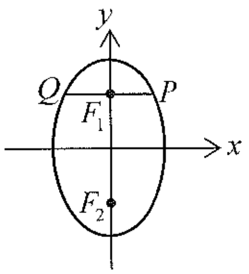
8. 設F_1、F_2為橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的兩個焦點，而 P 為橢圓上一點.已知 P 在第三象限且滿足$\overline{PF_1}\perp\overline{PF_2}$，求$\triangle PF_1F_2$的面積為_________ .

9. 設 F 為拋物線$\Gamma_1 : y^2 = 8x$ 的焦點，且 F 也是橢圓 $\Gamma_2 : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{k} = 1 (k > 0)$的其中一個焦點．若 P 為Γ_1 與Γ_2 的一個交點，且 P 落在第一象限，求$\overline{PF}$ 長度為________．

四、 計算證明題(共 14 分)

1. 如圖，設橢圓$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$(其中 $a > b > 0$)的兩焦點分別為 F_1 、 F_2 ，試證：正焦弦長$\overline{PQ} = \dfrac{2b^2}{a}$ ．

(6 分)



2. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$可以把直線 L 變換成直線 L 本身，求直線 L 的方程式．**(8 分)**

國立武陵高級中學 104 學年度第 2 學期 數學科 高二自然組 期末考

〈答案〉

答案卷 (考完請繳回這張即可)

範圍：3-3 反方陣~4-2　　班級：________　座號：________　姓名：__________

一、配合題：(每題 2 分，共 10 分)

1	2	3	4	5
C	E	D	B	F

二、多重選擇題：(8 分/5 分/2 分)

1
BCD

三、填充題(共 10 格，配分如下表)

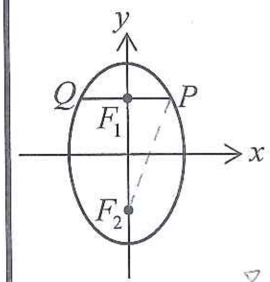
答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	18	26	34	40	46	52	58	64	68

1	2	3	4	5
$\left(\frac{9}{4},-1\right)$	$a<\frac{-1}{4}$	$2^{n+1}-2\cdot 3^n$	$(2,-3)$	$(5,7)$

6 (1)	6 (2)	7	8	9
$\frac{4}{5}$	$\left(\frac{4}{3},\frac{-8}{5}\right)$	25	16	$\frac{13}{5}$

四、計算證明題(共 14 分)

1(6 分)



連 $\overline{PF_2}$

設 $\overline{PF_1}=k$

$\Rightarrow \overline{PF_2}=2a-k$ (2%)

又 $\overline{F_1F_2}=2c$ (其中 $c^2=a^2-b^2$)

∵ $\triangle PF_1F_2$ 為直角三角形

∴ $k^2+(2c)^2=(2a-k)^2$ (2%)

$\Rightarrow k^2+4c^2=4a^2-4ak+k^2$

$\Rightarrow k=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}$

∴ $\overline{PQ}=2k=\frac{2b^2}{a}$ ※ (2%)

2(8 分)

設直線 L 為 $ax+by=c$

$$\begin{bmatrix}3&3\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+3y\\4x+7y\end{bmatrix}$$

$\begin{cases}x'=3x+3y\\y'=4x+7y\end{cases}$ (1%) 由題意知 x' 和 y' 也滿足 $ax'+by'=c$

代入得 $a(3x+3y)+b(4x+7y)=c$

$\Rightarrow (3a+4b)x+(3a+7b)y=c$ 和 $ax+by=c$ 為同一直線 (1%)

① 若 $c\neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases}3a+4b=a\\3a+7b=b\end{cases}$

得 $a=-2b$

即 $L: -2x+y=k$

其中 $k\in\mathbb{R}$，但 $k\neq 0$

② 若 $c=0$

$\Rightarrow \frac{3a+4b}{a}=\frac{3a+7b}{b}$

$\Rightarrow 3a^2+4ab-4b^2=0$

$\Rightarrow (3a-2b)(a+2b)=0$

$\Rightarrow 3a=2b$ 或 $a=-2b$ 和①相同

綜合①,②可知，L 為 $-2x+y=k$ $(k\in\mathbb{R})$ 或 $2x+3y=0$ #

3%　　3%