

# 國立武陵高級中學 104 學年度第一學期二年級期末考數學試題

範圍：2-2、2-3、3-3 點到直線距離~3-4

一、 填充題：每格 6 分，共 9 格，共 54 分

1. 若已知  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 115$ ，則  $\begin{vmatrix} 8b_2 - b_1 & b_1 + 7b_2 \\ 8a_2 - a_1 & a_1 + 7a_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 已知  $(x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 10$ ，若令  $x+3y$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，

試求(1)  $(M, m)$  為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) 當  $x+3y = M$  時， $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知一圓方程式  $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ ，圓外一點  $A(8, 12)$ 。可由  $A$  向圓作切線，若將切線的法向量寫為  $(1, a)$ ，則所有可能的  $a$  值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(答案有兩個)

4. 已知平面直角坐標上有  $A(3, -2)$ 、 $B(-1, 5)$ 、 $C(8, -1)$  三點，現在在第一象限有另一點  $D$ ，滿足

$\vec{AB}$  在  $\vec{AD}$  上的正射影和  $\vec{AC}$  在  $\vec{AD}$  上的正射影相同，且  $|\vec{AD}| = 2\sqrt{13}$ ，試問：

(1)  $\vec{AC}$  在  $\vec{AD}$  的正射影為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $\vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知一圓方程式  $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 29 = 0$ ，圓上一點  $A(3, 2)$ 。做一條過  $A$  點且與圓相切的切線為  $5x + ay + b = 0$ ，試問數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6.  $xy$  平面上有兩直線  $x - 3y - 3 = 0$  與  $12x + 5y + 5 = 0$ ，求此兩直線的角平分線方程式為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(直線有兩條)

7. 奇異果市 市內配有第一和第二消防分隊，兩分隊的據點距離 40 公里，其中第一大隊配有較先進的消防車，消防車的安全最高車速是 60(公里/小時)，第二大隊配備的消防車的安全最高車速是 20(公里/小時)。今天上級要求各分隊要設定「優先救災區」，準則如下：

A. 各分隊消防車一個小時內可以到達的距離(以地圖上的直線距離計算，不考慮障礙物)

B. 若各分隊消防車一個小時內可以到達的區域有重疊時，該區域劃入可以最先到達分隊的「優先救災區」(假設兩分隊的消防車都同時從分隊的據點出發)

試問，第一消防分隊的「優先救災區」的範圍有  $\underline{\hspace{2cm}}$  平方公里。

## 二、 多重選擇題：每題 8 分，共 3 題，共 24 分

(錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上該題不得分)

( ) 1. 關於下列的敘述，那些選項是正確的？

(1) 若  $xy$  平面上一直線  $3x+4y-10=0$ ，則原點  $(0,0)$  到此直線的距離為  $\frac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}} = -2$

(2) 已知向量  $\vec{a} = (1,2)$ ， $\vec{b} = (3,4)$ ，若  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  始點相同，則所張的三角形面積為  $\left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = 2$

(3) 已知二元一次聯立方程組  $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$  無解，則克拉瑪公式的  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

(4)  $A$ 、 $B$  為平面上兩相異定點，則平面上所有滿足  $\overline{PA} = 2\overline{PB}$  的  $P$  點形成的集合，會形成一個以  $B$  點為圓心的圓。

(5) 若  $\vec{a} = (3,4)$ ， $\vec{b} = (0,5)$ ，則  $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的正射影為  $\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$

( ) 2. 小武和小陵正在討論線性規劃的問題，則下列小武和小陵的敘述(粗斜體的選項)中，請將錯誤的敘述選出來：

小武：好煩喔，完全看不懂線性規劃的題目。你看，這題：

$$\begin{cases} x+y \geq 4 \\ -x+2y \geq 8 \\ -5x-2y \leq -20 \end{cases}, \text{求 } 2x+y \text{ 的最小值。}$$

小陵：喔，你先研究  $x+y \geq 4$  代表的區域，像  $(2,4)$  這個點在  $x+y=4$  的右側，會滿足

$x+y \geq 4$  的條件。你會發現**(1) 只要是  $x+y=4$  右側的點，都會滿足  $x+y \geq 4$ 。**

小武：所以**(2)  $-x+2y \geq 8$  的解區域也是在  $-x+2y=8$  的右側。**那第三個式子呢？

小陵：因為不等式是小於或等於，所以**(3)  $-5x-2y \leq -20$  解區域在  $-5x-2y=-20$  左側喔。**

然後，**(4) 解區域的交集會形成一個三角形內部(含邊界)，頂點是**

**$(0,4)$ 、 $(4,0)$ 、 $(2,5)$ 。**最後只要依序將頂點帶入  $2x+y$ ，就可以得到 4、8、9，所

**以(5) 答案的最小值就是 4。**

小武：我懂了，謝謝你。

( ) 3. 平面上三角形 ABC 如右圖所示。

已知  $m_1, m_2, m_3$  為實數，且  $m_1 < m_2 < m_3$ 。

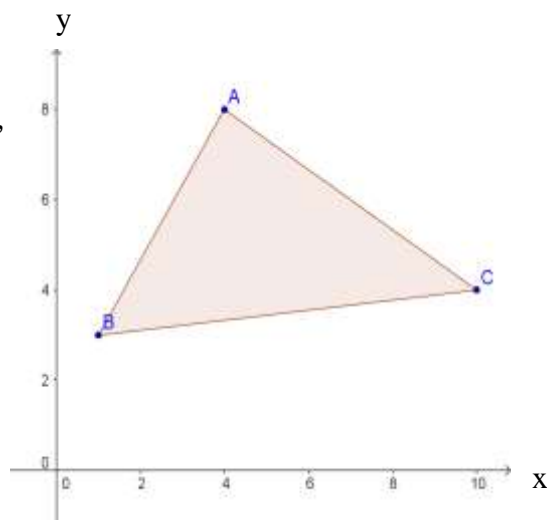
考慮  $mx - y$  的函數，當  $m$  依序為  $m_1, m_2, m_3$  時，

$mx - y$  的最小值只會依序發生在三角形區域

(含邊界) 的甲、乙、丙相異三點上，試問以下

敘述，哪些是正確的？

- |            |            |
|------------|------------|
| (1) 甲為 A 點 | (2) 甲為 B 點 |
| (3) 乙為 C 點 | (4) 乙為 A 點 |
| (5) 丙為 B 點 |            |



### 三、 計算證明題：共 22 分 (需寫出完整計算過程，違者不計分)

1. 已知  $k$  為實數，討論聯立方程組  $\begin{cases} kx + 3y = k - 1 \\ x + (2k - 1)y = 2 \end{cases}$ ，並回答下列問題。

(1) 請計算克拉瑪公式的  $\Delta$  的值(請因式分解)(2 分)

(2) 若該方程組有唯一解，則實數  $k$  的值為何？(2 分) 此時唯一解為何？(4 分)

(3) 若該方程組有無限多解，則實數  $k$  的值為何？(4 分)

2. 你在做這張考卷之前，可能會簡單預估一下要怎麼寫這張考卷。假如小二是你同學，他發現這張考卷有 3 題多選題，每題 8 分；9 格填充題，每格 6 分；計算題共 22 分。這次考試時間一共 70 分鐘，他先花了 20 分鐘寫完計算題(且完全答對)。根據平時經驗，他多選題每題都要花 7 分鐘，填充題每格都要花 6 分鐘。如果小二有做完的題目都完全正確，沒做完的題目都全錯(多選題各題只有全對或全錯)，且花完所預估的時間都恰能做完題目。若小二想要讓期末考得到最高分，因此寫了  $x$  題多選題， $y$  格填充題。試問，此時小二這張考卷最高可以得多少分(含計算題完全正確)？

考完了，記得再檢查一次，預祝寒假愉快