

一. 單選題(每題 5 分, 答錯不倒扣)

1. 已知向量 $\vec{a} = (4, -2)$, $\vec{b} = (9, 3)$, 則 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為下列何者?

- (1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) 135° (5) 90° 。

2. 向量 \vec{a}, \vec{b} 均非零向量, 若 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 則向量 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為何?

- (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{2\pi}{3}$ (5) $\frac{5\pi}{6}$ 。

3. 設向量 \vec{a}, \vec{b} 滿足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 則內積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值為下列何者?

- (1) -2 (2) 2 (3) 4 (4) -1 (5) 1。

4. 在 $\triangle ABC$ 中, D 點在 \overline{AB} 上且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, 若 $\overline{CB} = \vec{a}$, $\overline{CA} = \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 則 \overline{AD} 等於下列哪一個選項?

- (1) $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ (2) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ (3) $\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$ (4) $\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$ (5) $\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}$ 。

二. 多選題(每題全對得 6 分, 錯一個選項得 4 分, 錯二個選項得 2 分)

1. 已知直線 $L_1: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ 與 $L_2: x + y + 3 = 0$, 請問下列敘述哪些正確?

- (1) L_1 的方向向量與向量 $(4, -3)$ 平行 (2) L_2 的方向向量與向量 $(1, -1)$ 平行
 (3) L_1 與 L_2 的交點為 $(-5, 2)$ (4) L_1 與直線 $L': \begin{cases} x = 1 - 8s \\ y = -2 + 6s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$ 表示同一條直線
 (5) 設 L_1 與 L_2 的銳夾角為 θ , 則 $\cos \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

2. 在平面直角坐標系中, 有 $A(-3, 1)$ 、 $B(-2, -1)$ 二定點, 與選項中的五個函數圖形。試問這五個函數圖形中, 哪些函數圖形上可以找到 P 點, 使得內積 $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = 5$?

- (1) $y = 2^x$ (2) $y = -x^2 - 1$ (3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (4) $y = 2x - 1$ (5) $y = (x - 2)^3$

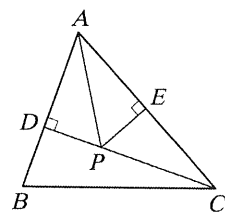
3. 平行四邊形 $ABCD$ 中, 試問下列各選項中的 P 點, 哪些會落在 $\triangle ABC$ 的內部或邊界上?

- (1) $\overline{AP} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{AD}$ (2) $\overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}$ (3) $\overline{AP} = \frac{5}{4}\overline{AB} - \frac{1}{5}\overline{AD}$
 (4) $\overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{4}{3}\overline{AD}$ (5) $-\overline{PB} + 2\overline{PC} + 3\overline{PD} = \overline{AP}$

4. 如右圖, 在銳角 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{CA} = 6$, 且 \overline{AC} 的中垂線 \overline{PE} 與 \overline{AB} 上的高 \overline{CD} 相交於點 P 。

若 $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ 則下列選項何者正確?

- (1) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12$ (2) $\overline{AB} \cdot \overline{AP} = 12$ (3) $\overline{AP} \cdot \overline{AC} = 18$
 (4) $x = \frac{1}{6}$ (5) $y = \frac{23}{48}$



三. 填充題

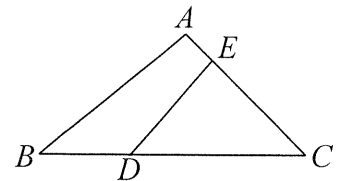
答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	24	30	34	38	41	44

1. 設 $A(2,3)$ 、 $B(1,1)$ ，若動點 $P(x,y)$ 在線段 \overline{AB} 上，且 $2x^2 + y^2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ _____。

2. 已知平面上三個向量 $\vec{a} = (3,2)$ ， $\vec{b} = (-1,2)$ ， $\vec{c} = (4,1)$ ，若實數 m, n 滿足 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ ，則數對 $(m, n) =$ _____。

3. 設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，向量 $\vec{a} = (x,1)$ ， $\vec{b} = (1,y)$ ， $\vec{c} = (2,-4)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ，則 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____。

4. 如右圖， D 在 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 邊上， E 在 \overline{AC} 邊上，且 $\overline{BC} = 3\overline{BD}$ ， $4\overline{AE} = \overline{CE}$ ，若 $\vec{ED} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

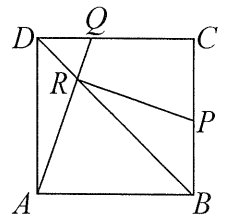


5. $\triangle ABC$ 中，若 $(x+y)\vec{AB} + (2x-y-1)\vec{AC} = \vec{BC}$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

6. 設 $A(0,0)$ 、 $B(10,0)$ 、 $C(10,6)$ 、 $D(0,6)$ 、 $P(7,4)$ 為坐標平面上的五個點。如果直線 L 過 P 點且將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，那麼 L 的方程式為 _____。

7. 過 $\triangle ABC$ 的重心 G 的一直線 L 與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 分別交於 D 、 E ，已知 $\overline{AD} : \overline{DB} = 4 : 1$ ，則 $\overline{AE} : \overline{EC} =$ _____。

8. 如右圖，在正方形 $ABCD$ 中， P 為 \overline{BC} 的中點， Q 在 \overline{CD} 上， \overline{AQ} 與 \overline{BD} 交於 R 點，且 $\vec{RP} \cdot \vec{RQ} = 0$ 。若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AQ}$ ($m, n \in \mathbb{R}$)，則 $m + n =$ _____。



四. 計算證明題(共 12 分，每題皆需要有詳細的計算或證明過程)

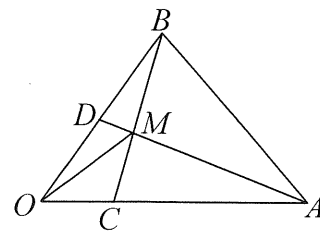
1. 如右圖所示，在 $\triangle OAB$ 中， $\vec{OC} = \alpha\vec{OA}$ ， $\vec{OD} = \beta\vec{OB}$ ， $0 < \alpha, \beta < 1$ ， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於點 M ，且 $\vec{OM} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB}$ ，試回答下列二問題。

(1) 試求 α 與 β 的值。(4 分)

(2) 在線段 \overline{AC} 上取一點 E ，在線段 \overline{BD} 上取一點 F ，

使 \overline{EF} 過點 M ，設 $\vec{OE} = p\vec{OA}$ ， $\vec{OF} = q\vec{OB}$ ，

求證： $\frac{1}{7p} + \frac{3}{7q} = 1$ 。(3 分)



2. “若平面上有相異三點 A, B, C 滿足 $x\vec{AB} + y\vec{AC} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ ，則 $x = 2, y = 3$ 。”

試問此敘述真或假? 若真，請證明；若假，請舉反例。(5 分)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一. 單選題(每題 5 分，答錯不倒扣)

1. (2)	2. (1)	3. (5)	4. (4)
-----------	-----------	-----------	-----------

二. 多選題(每題全對得 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分)

1. (1)(2)(4)	2. (4)(5)	3. (1)(2)(5)	4. (3)(5)
-----------------	--------------	-----------------	--------------

三. 填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	24	30	34	38	41	44

1. 20	2. $(\frac{5}{9}, \frac{8}{9})$	3. $\sqrt{10}$	4. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{15})$
5. $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	6. $x - 2y + 1 = 0$	7. 4 : 3	8. $\frac{4}{3}$

四. 計算證明題(共 12 分，每題皆需要有詳細的計算或證明過程)

1.(7分)

(1) ① $\vec{OM} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB} = \frac{1}{7}(\frac{1}{\alpha}\vec{OC}) + \frac{3}{7}\vec{OB}$

因為 $B-M-C$ ，所以 $\frac{1}{7\alpha} + \frac{3}{7} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ (2分)

② 同理， $\vec{OM} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}(\frac{1}{\beta}\vec{OD})$

$\Rightarrow \frac{1}{7} + \frac{3}{7\beta} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ (2分)

(2) 因為 $\vec{OM} = \frac{1}{7}(\frac{1}{p}\vec{OE}) + \frac{3}{7}(\frac{1}{q}\vec{OF})$

且 E, M, F 三點共線 (2分)

所以 $\frac{1}{7p} + \frac{3}{7q} = 1$ (1分)

2.(5分) 此敘述不真。 (2分)

例如設 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $C(2,0)$

則 $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = (8,0) = 4\vec{AB} + 2\vec{AC}$ (3分)