

數學科

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

一、選擇題(60 分)

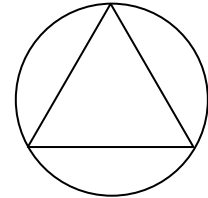
說明：第 1 題至第 10 題，每題四個選項，其中只有一個是最適當的選項，請將答案畫記至答案卡上。各題答對得 6 分，答錯或不作答不予計分

- 1.() 古代有間客棧住著一名客人，客人離開客棧時騎著一匹日行 300 里的馬。在客人離開四個時辰(8 小時)後，客棧老闆才發現客人有東西未帶走，就立刻騎著另一匹馬追趕，物品交還後，立刻騎馬返回客棧。到達客棧時(從客人離開時算起)已經過了九個時辰(18 小時)。若客人當時所騎的馬日行 390 里，則客棧老闆騎同一匹馬(從客人離開時算起)追上客人交還物品並返回時，已經過了多少個時辰？

(1) 12 (2) 14 (3) 16 (4) 18

- 2.() 一邊長為 4 的正三角形內接於一個圓(如圖)，則圓的弦中，通過這個正三角形某兩邊中點的弦長為多長？

(1) $4\sqrt{3}$ (2) $4+\sqrt{3}$ (3) 4 (4) $2\sqrt{5}$



- 3.() 使得 x 和 $x+99$ 都是完全平方數的正整數 x 有多少個？

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

- 4.() 已知直角座標系中，直線方程式 $y=ax+b$ 的圖形過一、二、四象限，且與 x 軸交於點(3,0)，則關於 x 的不等式 $a(x-1)-b>0$ 的解為？

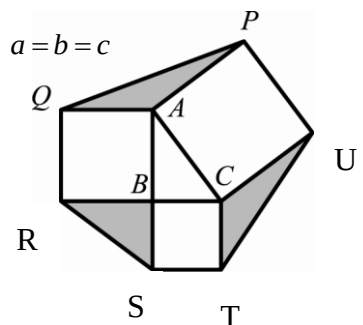
(1) $x>-2$ (2) $x<-2$ (3) $x<4$ (4) $x>4$

- 5.() 某正整數 a 滿足 $0<a<30000$ ，且 a 的 $\frac{1}{3}$ 是完全平方數， a 的 $\frac{1}{2}$ 是完全立方數，則所有 a 的可能值的總和為多少？

(1) 28080 (2) 11664 (3) 33264 (4) 27216

- 6.() 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\overline{AB}=3$ 。分別以 $\triangle ABC$ 的三邊為一邊向外作正方形，如圖所示。設 $\triangle APQ$ 、 $\triangle BRS$ 、 $\triangle CTU$ 的面積為 a, b, c ，則 a, b, c 的大小為何？

(1) $a>b>c$ (2) $a>c>b$ (3) $c>a>b$ (4) $a=b=c$



7.() 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$, 則 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2013} a_{2014}$ 的值為

- (1) $\frac{1006}{1007}$ (2) $\frac{2015}{2014}$ (3) $\frac{2014}{2013}$ (4) $\frac{2013}{2014}$

8.() 設 a, b 為整數, 且滿足方程式 $\frac{1}{10} = \frac{1}{a} + \frac{b}{5}$, 則數對 (a, b) 有多少種可能?

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

9.() 設 a, b, c 成等差數列且 $a \geq b \geq c \geq 0$ 。若 $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ 重根, 則此根為?

- (1) $-2 + \sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $-1 + 3\sqrt{2}$ (4) $-2 + 3\sqrt{5}$

10.() 有多少個四位數 (即 1000 至 9999 的正整數) 滿足下列的條件: 其 4 個數字都不是 0, 4 個數字又互不相同, 且 4 個數字的和為 12

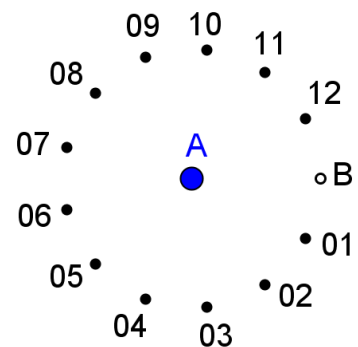
- (1) 24 (2) 36 (3) 48 (4) 72

二、選填題(90 分)

說明: 第 A 題至第 J 題, 每題請依照答案格式將答案畫記到答案卡上。各題每格全部答對才得 9 分, 答錯或不作答不予計分。

A. 設多項式 $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $g(x) = x^2 + hx + k$, 已知 $f(x) = 0$ 的兩個根分別為 α, β , 且 $g(x) = 0$ 的兩個根分別為 α^5, β^5 , 則 $g(-1) = \underline{\quad \textcircled{11} \textcircled{12} \textcircled{13} \textcircled{14} \quad}$

B. 如圖所示, 有 13 隻老鼠圍繞著一隻貓(A), 這 13 隻老鼠, 除了老鼠 B 是白色的之外, 其餘 12 隻都是黑色。今這隻貓吃老鼠的順序是: 先選定一隻老鼠來吃, 接下來的順序都是吃「依順時針方向, 從被吃掉的老鼠的下一隻算起的第 6 隻」, 例如這隻貓第一次如果吃的是 2 號老鼠, 則下一次牠會吃 8 號, 下一次牠會吃 1 號, 下一次牠會吃 9 號... 依此類推。這隻老鼠想把白色老鼠 B 留到最後再吃, 則牠第一隻應該選擇吃 ⑮⑯ 號 (答案請用兩位數作答, 例如答案為 7 號, 請答 07)

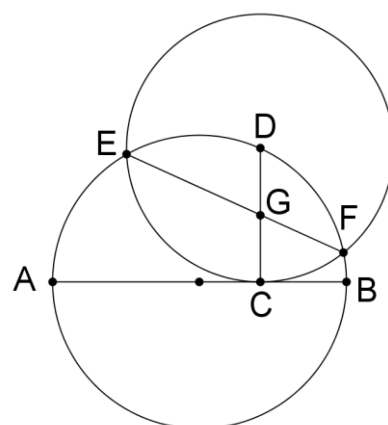


C. 設三個大於 1 的正整數 a, b, c 兩兩互質，且 $abc = 189000$ 。則 $a + b + c$ 的最大值為 ⑰⑱⑲⑳

D. 設 x 與 y 為任意的實數，求出 $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(x - y)^2 + 1} + \sqrt{(y - 5)^2 + 9}$ 的最小值為 $\sqrt{n}$ ，則 $n =$ ㉑㉒

E. 如圖所示， C 為直徑 $\overline{AB}$ 上一點，過 C 做 $\overline{AB}$ 的垂直線，此線交圓於 D 點，再以 D 為圓心， $\overline{CD}$ 為半徑作圓，兩圓相交於 E, F 兩點。設 $\overline{EF}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 G 點。

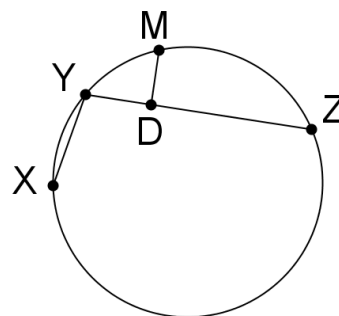
若 $\overline{AC} = 8, \overline{BC} = 6$ ，則 $\overline{CG}^2 =$ ㉓㉔



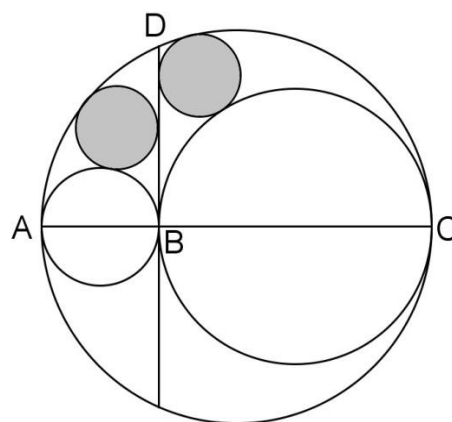
F. 若 x 為 $4x^2 - 24x - 17 = 0$ 的根，若 $(x + 1)(x - 2)(x - 4)(x - 7) = -\frac{a}{b}$ ，其中 a, b 為互質的正整數，試求 $a + b =$ ㉕㉖㉗

G. 已知 $a + \frac{1}{a} = -3$ ，且 $\frac{a^{12} + 1 + 2a^6}{a^4(a^2 + a + 1)^2} =$ ㉘㉙

H. 如圖所示，圓上有三點 X, Y, Z ，其中 $\overline{XY} = 15, \overline{YZ} = 33$ ， M 點是弧 XYZ 的中點， D 為 $\overline{YZ}$ 上一點，且 $\overline{YZ} \perp \overline{MD}$ 。則 $\overline{DZ} =$ ③①。



I. 如圖所示， A, B, C 三點共線，且 $\overline{AB} = 60, \overline{BC} = 140$ ，分別以 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 為直徑作三個圓，設此三圓分別叫做 X, Y, Z 。過 B 點作 $\overline{AC}$ 的垂線交圓 Z 於 D 點。宇廷作兩個圓，第一個圓與 $X, Z, \overline{BD}$ 相切，第二個圓與 $Y, Z, \overline{BD}$ 相切，如圖中之灰色區域。若這兩個圓的面積和為 $n\pi$ ，試求 $n =$ ③② ③③ ③④。



J. 設實數 $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ 且 $5a + 4b + 3c + 6d = 100$ ，若 $a + b + c + d$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ ③⑤ ③⑥。